Revista de la Escuela Colombiana de Ingeniería, N.° 113
ISSN 0121-5132 Enero-marzo de 2019, pp. 31-50

Concepciones de infinito en estudiantes universitarios de primer año

Conceptions of infinity in first year university students

ANDREA GONZÁLEZ MORENO - LUIS ENRIQUE PEDRAZA GARCÍA - NORA YAMILE ROJAS CATAÑO
Departamento de Matemáticas de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

andrea.gonzalez@escuelaing.edu.co - luis.pedraza@escuelaing.edu.co - norma.rojas@escuelaing.edu.co

Recibido: 23/10/2018 Aceptado: 10/11/2018
Disponible en http://www.escuelaing.edu.co/es/publicaciones_revista
http://revistas.escuelaing.edu.co/index.php/reci

Resumen
En este artículo se presenta una investigación que tiene como principal objetivo estudiar el concepto de infinito en los estudiantes, así como identificar si la noción que manejan es infinito actual o infinito potencial. Busca establecer si el curso de cálculo diferencial influye en la idea del estudiante sobre el infinito. En este estudio participaron 24 estudiantes de Precálculo y 19 estudiantes de Cálculo Diferencial de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

Palabras claves: infinito, potencial, actual, cálculo.

Abstract
This paper presents a research project whose main goal is to find out how students understand the concept of infinity. It aims to identify whether the notion that they handle is actual infinity or potential infinity. It seeks to establish whether the Differential Calculus course has an influence on the students' idea of infinity. In this study 24 Pre-calculus and 19 Differential Calculus students of Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito participated.

Keywords: infinity, potential, actual, calculus.

INTRODUCCIÓN

El término *infinito* forma parte de la enseñanza de las matemáticas y ha presentado un desarrollo histórico que abarca dos conceptos: *infinito potencial* e *infinito actual* (D'Amore, 1996). Según López (2014), el infinito potencial es concebir el infinito como un proceso de crecimiento sin final, y el infinito actual es concebir que el infinito como una totalidad completa existe en un cierto instante. A juicio de Waldegg (1996), el infinito potencial es lo que no tiene fin, algo que siempre se puede continuar y se asocia a la falta de límites o de fronteras; por otro lado, el infinito actual es lo que está asociado con la idea de totalidad, completitud y unidad. Para Ortiz (1994), se distinguen dos tipos de infinito: el infinito como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y el infinito como una totalidad completa. El primero es el infinito potencial y el segundo, el infinito actual.

A pesar de la importancia de esta definición, algunos de los profesores encargados de enseñar los diversos conceptos a los estudiantes, específicamente los docentes con un enfoque absolutista, presentan una definición formal, sin preocuparse por su correcto entendimiento en los alumnos (Moreno Moreno, 2005), por lo cual es importante apreciar la forma en que se trabaja con el infinito potencial y actual durante los primeros cursos, ya que es allí donde se presentan las primeras interacciones y conceptos formales con este objeto.

Investigadores en didáctica de las matemáticas, como Arrigo & D'Amore (1999) & Garbin (2003); Garbin & Azcárate (2002); Vera, Pinilla & Roa (2010), encuentran que incluso hoy en día existe confusión en los estudiantes entre los conceptos de infinito potencial e infinito actual, utilizando el concepto de infinito potencial incluso cuando se está tratando con el concepto de infinito actual (Garvin, 2005; Garbin & Azcárate, 2002; Arrigo & D'Amore, 1999; Vera, Pinilla & Roa, 2010).

En este trabajo se pretende identificar las ideas intuitivas sobre el infinito que han desarrollado los estudiantes que están tomando cursos de Precálculo y Cálculo Diferencial en la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, indagar acerca de la existencia de un cambio en el concepto de infinito en el transcurso del curso de Precálculo al curso de Cálculo Diferencial y generar en el estudiante una idea intuitiva sobre la cardinalidad de los conjuntos infinitos.

ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Estado del arte

a) Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo (Garvin, 2005)

En este documento se explora la dualidad que existe entre el infinito potencial y el actual en algunos estudiantes que, de alguna manera ya tienen el conocimiento de conceptos formales durante sus cursos de cálculo diferencial e integral. Se logra mostrar, además, las inconsistencias e inconvenientes que tiene una persona al no poder separar la idea intuitiva y formal del concepto de infinito. Esto lleva a que, sin darse cuenta, el estudiante trabaje un mismo problema en diferentes contextos, e incluso obtenga resultados distintos en algunos casos.

La metodología del estudio consiste en una prueba escrita de dos partes; en la primera se plantean cinco preguntas alrededor de la paradoja de la dicotomía de Zenón y luego se pregunta si hay una relación entre algunos puntos, con el objetivo de ver si el estudiante relaciona lo que está sucediendo detrás de la máscara de cada ejercicio.

Lo que hacen es un distinto planteamiento de las preguntas, pero de fondo tienen el mismo problema de la paradoja; sin embargo, está sumergida en contextos diferentes o representaciones que permiten al estudiante ver el problema desde otros puntos de vista.

Los resultados de cada una de estas pruebas muestran la inconsistencia de la mayoría de los estudiantes con el concepto que tienen del infinito, ya que sin importar que en el fondo se está trabajando el mismo problema, empiezan a oscilar entre la idea intuitiva y formal del infinito; en otras palabras, pasan del infinito potencial al infinito actual, dependiendo del contexto en que se les plantee el problema. Más aún, son muy pocos los que usan argumentos matemáticos formales, como el concepto de límite, sucesión o serie, lo que lleva a concluir en el texto que, a pesar del conocimiento previo en el manejo del infinito en cursos de cálculo, no hay un aporte significativo o determinante de éstos con la coherencia deseada de la imagen formal del concepto de infinito.

b) El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros (Moreno Moreno, 2005)

Este artículo pretende ser una reflexión acerca de la situación actual de la enseñanza del cálculo en la universidad, así como una justificación de la necesidad e importancia de las investigaciones didácticas en el ámbito del conocimiento del profesor, como motor del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Se explica que existe un distanciamiento entre la investigación y la innovación y renovación. Como ejemplo está Estados Unidos, donde aplican los proyectos inscritos en el área de renovación sin tener en cuenta los trabajos de investigación. Hay un problema tanto en las investigaciones didácticas como en los intentos por innovación; los primeros no cuentan con un marco teórico que sustenten sus tres dimensiones (epistemológica, cognitiva y didáctica), mientras que los segundos, dado su afán de convencer, dejan a un lado los problemas y pueden caer en un discurso ingenuo, tomando como análisis cognitivo y didáctico el hecho de que estas herramientas constituyan un catalizador para forzar la evolución de las prácticas pedagógicas de los profesores.

En este trabajo se considera un elemento clave para el éxito: el profesor. La interpretación de las concepciones y creencias de los profesores es clave, por lo que se da un ejemplo de investigación sobre creencias de profesores de matemáticas en el nivel universitario. Para el estudio se cuenta con la ayuda de seis profesores de universidad, matemáticos especialistas en matemática aplicada y que imparten docencia en facultades de matemáticas, química, biología o veterinaria, todos con mínimo seis años de experiencia.

Se describe a los profesores A, C y F como instrumentalistas, el profesor B también como instrumentalista, pero con tendencia a lo pragmático-constructivista, el profesor D es dogmático-conservador y el profesor E, aunque su creencia personal dice ser pragmático-constructivista, el análisis de los datos lo califica en una mezcla de dogmático-conservador e instrumentalista. Seguido de esto se los ubica en los siguientes grupos: I (profesores A, B y F), II (profesores C y D) y III (profesor E). Esta tipificación se debe en gran medida al estudio del nivel de coherencia mostrado por los profesores y el grado de consistencia de sus creencias.

Se elige a los profesores A y D, con el fin de definir cómo puede ser la actuación posterior una vez detectadas e identificadas las creencias de los profesores, analizando el grado de consistencia o permeabilidad de éstas, así como las coherencias e incoherencias internas. El profesor A no considera necesario exigir un excesivo formalismo, mientras que el profesor B piensa que es necesario transmitir a los estudiantes el valor de los objetos matemáticos y sus significados, y exigir rigor y bastante grado de formalismo. Sin embargo, las diferencias continúan cuando se estudia el grado de coherencia de lo que ellos dicen respecto a los resultados que dan los datos.

Se encuentra que el profesor A cae en contradicciones internas y por esto se pone en situación de cambio de creencias puesto que se siente incómodo en las suyas, o al menos en encontrar "algo" que lo llene tanto a él como a sus estudiantes. Por otro lado, el profesor D es lo contrario: muy coherente, seguro y convencido de su actuación como profesor y matemático, y sin sentir ningún tipo de carencia en su formación profesional. Y puesto que no siente duda, tampoco siente ninguna necesidad de cambiar nada, pues para él el cambio no tiene sentido porque las cosas funcionan de manera aceptable.

En el "Proyecto de debate científico", tal como lo dice la autora, existe un obstáculo didáctico dado el conflicto que hay entre el enfoque científico y los hábitos de aprendizaje. Por otro lado, cabe destacar que con el "Proyecto de cálculo en contexto" puede presentarse una buena solución a los obstáculos epistemológicos, pues son los mismos estudiantes quienes van construyendo las matemáticas; así ellos reconocen y superan los obstáculos que se les van presentando.

Al tener en cuenta al profesor en el estudio, sus concepciones y sus creencias, esta es una manera de superar las dificultades que se originan en la enseñanza por alguno de los errores didácticos, a saber: metodológicos, curriculares o conceptuales. Por último, respecto al estudio realizado a los profesores, puede identificarse en el profesor D una aproximación modernista, específicamente una aproximación absolutista, y tal como ya se dijo, para este tipo de profesores la palabra *cambio* no tiene sentido, por lo cual siguen enseñando el concepto de límite formalmente sin presentar preocupación alguna por el entendimiento de esta definición.

c) El infinito: concepciones de los estudiantes que transitan del colegio a la universidad (Vera, Pinilla & Roa, 2010)
En este trabajo se busca determinar la concepción sobre el infinito que tienen estudiantes de último año del colegio y estudiantes universitarios de los primeros años, por medio de un cuestionario llamado "prueba piloto",

en el que inicialmente se plantea una situación basada en la paradoja de la dicotomía en el contexto de un automóvil que viaja entre dos puntos. Posteriormente, se plantea la comparación entre puntos de segmentos de diferentes tamaños y entre conjuntos infinitos, y luego se plantea una suma infinita en la que se pregunta sobre su resultado.

Seguido de esto, se formula una pregunta para que el estudiante reflexione sobre situaciones en su vida cotidiana en que esté involucrado el infinito y de este modo hacer la última pregunta que se expone en el hotel infinito de Hilbert, donde la idea es generar un choque entre la concepción del infinito actual y el potencial al crear un escenario donde un infinito puede contener a otro.

Vale la pena señalar que se enfatiza en la influencia que hay de las ideas intuitivas que se adquieren por fuera del ámbito académico sobre el infinito y que crean un obstáculo a la hora de reformular este concepto para su funcionamiento dentro de situaciones matemáticas; por eso hay que comprender que el infinito actual, que implica que se elaboren construcciones complejas que van en contra de la intuición. Además de esto, se menciona que lo normal es que durante el bachillerato el concepto de infinito se plantee, a grandes rasgos, como algo que no tiene fin; es decir, que el desarrollo inicial de toda la matemática se plantea con este razonamiento.

La primera gran conclusión del estudio es que hay un problema a la hora de pensar en el "infinito en lo pequeño", ya que la idea intuitiva y que se relaciona más con la concepción común es la de "infinito en lo grande". Esto se plasma en la dificultad que tienen los estudiantes para dar solución a la paradoja de la dicotomía de Zenón, en la que hay dos procesos a la vez, uno donde hay infinitas divisiones crecientes que divergen, contrastado con una distancia que disminuye infinitamente y converge. Es de recalcar que se presentan casos donde los estudiantes no alcanzan a dar ni siquiera el salto entre lo finito y lo infinito, por lo que éstos sugieren soluciones finitas a los problemas que se han propuesto en el cuestionario.

Un punto clave a la hora de trabajar con este concepto, y que se plasma en el texto, es el poco impacto que tienen los conocimientos en cálculo I y II acerca del infinito. Esto teniendo en cuenta que los estudiantes universitarios ya han trabajado de manera cercana con conceptos como límites y sucesiones que se basan en el infinito para desarrollarse, puesto que en esencia sus respuestas reflejan que no tienen una idea clara sobre el concepto formal de infinito. Adicionalmente, por medio de los puntos en los que se pedía la comparación del tamaño de conjuntos y el problema del hotel de Hilbert, se consiguió que los estudiantes se cuestionaran sobre la existencia de más infinitos y de sus tamaños.

d) Obstáculos epistemológicos y didácticas en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual (Arrigo & D'Amore, 1999)

En este trabajo, tal como lo dice su autor, se estudian los límites de comprensión y aceptación por parte de los estudiantes en la escuela secundaria superior, en relación con el uso del infinito actual y en particular sobre el teorema de Georg Cantor.

Según la investigación, después de que el estudiante acepte el hecho de que los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ tienen la misma cardinalidad, creen que pueden concluir que esto depende del hecho de que ambos son conjuntos infinitos y que, por lo tanto, todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad (infinita). Seguido de esto se pone en evidencia otra conclusión de los estudiantes: en un segmento largo existen más puntos que en un segmento más corto.

El estudio se llevó a cabo en 16 grupos con una edad variable entre los 15 y los 18 años, para un total de 287 estudiantes. Ninguno de ellos había tenido una enseñanza en análisis y tampoco en el infinito matemático, por lo que no habían afrontado la diferencia entre infinito actual y potencial. Se les muestra por medio de un video tres demostraciones:

1. *Segmentito - segmentote*. Demuestra el hecho de que en el plano puntual dos segmentos de diferente longitud son equipotentes.
2. *Formas decimales periódicas*. Presentación y demostración del hecho de que $0{,}3\overline{9} = 0{,}4$.
3. *Teorema de Cantor*. Presentación y demostración del hecho de que en el plano puntual un cuadrado es equipotente a uno de sus lados.

Tal como se esperaba, los estudiantes entendieron la segunda demostración, pero en la primera un 38 % de estudiantes y en la tercera un 67 % de estudiantes no lograron captar ningún elemento positivo del video.

Una conclusión a la que llegó el autor respecto a la demostración del teorema de Cantor es la siguiente: el obstáculo epistemológico, en este caso, parece ligado a las dimensiones diferentes de los elementos que se confrontaron y quizás a la noción común euclídea "El todo es mayor que una parte", que en este caso es muy evidente y que parece tener una aceptación y raíces aún más profundas que en el caso "Segmentito-segmentote". Por otra parte, la misma historia nos dice que esta era la convicción de los matemáticos de finales del siglo XIX e incluso del mismo Cantor.

Después de un año de enseñanza de análisis a algunos estudiantes, se les mostró la prueba que habían realizado; un estudiante escribió que a $0,\overline{9}$ le falta un pedacito "al final del infinito" para llegar a 1. Otros dos escribieron que ahora sí entendían la demostración del teorema, pero que no la creían.

Teniendo en cuenta lo dicho en el artículo, vale la pena destacar algunas cosas: una representación de una misconcepción se da cuando los estudiantes concluyen que los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad; allí, además, presentan un obstáculo y deben salir de él para poder superar las dificultades. Esto mismo sucede cuando los estudiantes piensan que en un segmento largo existen más puntos que en un segmento más corto.

Como se concluyó en el informe, los estudiantes entendieron mejor la segunda demostración que la primera y la tercera; esto puede servir como un ejemplo de las conclusiones intuitivas a las que llegaron los estudiantes respecto a la cardinalidad y a los segmentos de distintos tamaños. Teniendo en cuenta que no se superó esa dificultad, entonces presentan conflictos en el momento de utilizar tales conceptos.

Breve historia y epistemología del concepto de infinito

En razón de que no existe registro alguno con respecto a la discusión o a la conceptualización del infinito, se comienza la historia del infinito con los antiguos griegos (Donald, 1999). Así, se llega a la denominada escuela pitagórica, cuyos miembros buscaban expresar todo en términos de números naturales, pues los consideraban como la esencia de todas las cosas (Boyer, 2007). Por esto se ocultó el descubrimiento de las llamadas "magnitudes inconmensurables", ya que contradecía lo que habían descubierto hasta el momento.

El siguiente problema lo presentó Zenón con sus conocidas paradojas sobre el tiempo y el movimiento, una de las cuales es la paradoja de la dicotomía: "Afirma la no existencia del movimiento basándose en que lo que está en movimiento debe alcanzar la posición a medio camino antes de alcanzar su meta" (Boyer, 2007), teniendo como resultado la aparición de un proceso infinito.

Aristóteles, interesado en estos problemas, "rechaza la noción del infinito por las contradicciones que ocasionaba; sin embargo, trata de resolver las controversias que generaba concibiendo dos formas diferentes de éste: el infinito como un proceso de crecimiento sin final, o de subdivisión sin final, infinito potencial, y el infinito como una totalidad completa, que existe en un cierto instante, infinito actual" (López, 2014). No obstante, con esta distinción, Aristóteles acepta el concepto de infinito potencial y rechaza el de infinito actual, pues consideraba que esto no generaba ningún obstáculo en la matemática, tal como lo dice en su Libro III de Física.

Después de Aristóteles, los matemáticos optaron por evitar el concepto de infinito, tal como lo hizo Euclides con su definición de línea, la cual dice que se puede extender tanto como sea necesario; o de punto, que lo toma como algo que no tiene parte (Donald, 1999). También fue el caso de Arquímedes y Eudoxo, quien dice: "Al eliminar sucesivamente la mitad o más de un objeto, su tamaño se puede hacer indefinidamente pequeño" (Donald, 1999). Según López (2014), a Eudoxo se le atribuye el hecho de poder separar de las consideraciones matemáticas las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes.

Los árabes y los europeos continuaron trabajando con lo ya desarrollado hasta el momento, pero esquivando el concepto de infinito. En 1600, Galileo sugirió la inclusión de un número infinito de huecos infinitamente pequeños; no obstante, este razonamiento consistía en utilizar la noción de finito en cosas infinitas. Además de esto, "argumenta que, aunque se puede establecer una correspondencia biunívoca entre el lado de un cuadrado y su diagonal, la diagonal al tener mayor longitud debería contener más puntos que el lado" (López, 2014).

En el siglo XVII, con el desarrollo del cálculo infinitesimal y la interpretación cuantitativa que se les otorgó a los indivisibles, se observaron nuevamente las inconsistencias que existían al utilizar el concepto de infinito potencial; ni Newton ni Leibniz consiguieron resolver estos problemas lógicos de fundamentación, logrando con ello que se acumularan numerosas contradicciones y paradojas, dado el uso otorgado a los métodos infinitesimales. Esto condujo a la refundación crítica del Cálculo en términos de la noción de límite (Bombal, 2010)

Bolzano fue el primero en aceptar sin reservas el infinito actual y en trabajar con este concepto admitiendo la comparación entre el tamaño de conjuntos infinitos y una posible jerarquía entre ellos; él dice: "Llamaré infinita a una multitud si todo conjunto finito es tan sólo una parte de ella" (Bolzano, 1991). Después de esto hubo más investigaciones y descubrimientos, como el de Dedekind y Cantor quienes junto con la existencia del infinito aceptaron el hecho de que un conjunto puede tener el mismo tamaño que alguno de sus subconjuntos propios (Bombal, 2010).

Cantor continuó estudiando este concepto y logró probar varios resultados, como el siguiente: "Prueba que los naturales son el conjunto infinito con menor potencia y que la potencia de $\mathbb{R}$ y la de $\mathbb{R}^h$ es la misma para cualquier entero positivo n" (Bombal, 2010).

Obstáculos en el aprendizaje del concepto de infinito

En el marco de la investigación sobre el infinito actual, Garbin (2003) se enfoca en estudiantes universitarios que ya cursaron Cálculo Diferencial e Integral, y establece a modo de conclusión "que el conocimiento previo formal del Cálculo Diferencial e Integral es de ayuda, pero no de una manera significativa o determinante, para establecer y reconocer las conexiones oportunas y fundamentales entre los problemas planteados, así como de potenciar la noción del infinito actual" (Garbin, 2003).

Una respuesta al problema de si es posible que dos segmentos representen la misma cantidad de puntos cuando un segmento tiene una longitud mayor que el otro es que el segmento más corto tendrá una cardinalidad $\aleph$ y el segmento más largo tendrá una cardinalidad $2\aleph$.

Por otro lado, para el estudiante es de difícil admisión las diversas cardinalidades transfinitas (Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995). "Normalmente, para los estudiantes la cardinalidad de $\mathbb{Z}$ es, en un primer momento, superior a la de $\mathbb{N}$ (hay quien incluso dice que es el doble). Pero una vez que se acepta la demostración de que, en cambio, estos dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, muchos estudiantes creen que pueden concluir que esto depende del hecho de que ambos son conjuntos infinitos y que, por lo tanto, "todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad", o sea, infinita" (Arrigo & D'Amore, 1999).

Respecto de los dos problemas anteriores, los estudiantes se hallan en contradicción tomando en cuenta sus respuestas al aceptar que los dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, pero afirmando que los dos segmentos no pueden representar la misma cantidad de puntos; sin embargo, "parece que los estudiantes no se hallan interesados en volver coherentes sus creencias" (Arrigo & D'Amore, 1999).

Al considerar la investigación de Garbin y Azcárate (2002), cuando se les hace la pregunta a los estudiantes sobre la serie $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$, muy pocos responden que es 1, la mayoría contestan que es infinita y tiende a 1, mientras que algunos le dieron valor tomándola como una suma finita (Garbin & Azcárate, 2002).

METODOLOGÍA

Técnicas de recolección de datos y población

Para la actividad, se realizó un cuestionario estructurado en un grupo de Precálculo y uno de Cálculo Diferencial de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

El curso de Precálculo consta de 24 estudiantes, de los cuales 23 son de ingeniería civil y 1 de ingeniería de sistemas. Por otro lado, el grupo de Cálculo Diferencial está conformado por 17 estudiantes, de los cuales 6 son de ingeniería civil, 2 de ingeniería industrial, 2 de ingeniería mecánica, 1 de ingeniería eléctrica y 6 de ingeniería biomédica. Los grupos no tienen características específicas, salvo el curso de Precálculo, que contaba con algunos estudiantes que no eran universitarios, ya que estaban en el colegio y cursaban algunos cursos por procesos de inmersión.

El cuestionario está estructurado de la siguiente manera (anexo A): la primera parte es tipo *diagnóstico* y consta de tres preguntas, en las cuales se busca conocer la idea que tiene el estudiante sobre el infinito e indagar si ha estudiado el concepto en algún momento anterior, con el fin de identificar si existe algún caso en el que estudiante ya esté manejando el infinito actual o el potencial.

La segunda parte del cuestionario es una *prueba sobre infinito* y está enfocada en presentar situaciones basadas en la paradoja de la dicotomía de Zenón. Se plantea el movimiento entre dos puntos por medio de infinitas divisiones del recorrido, pero desarrolladas en espacios diferentes, con el propósito de causar en el estudiante conflictos cognitivos al enfrentar el concepto de infinito potencial y de infinito actual.

Después de esto se plantean algunos *ejercicios* en los que el estudiante debe comparar la cantidad de elementos en dos conjuntos que sean infinitos, una vez más recurriendo a un cambio de contexto del problema para crear conflictos cognitivos nuevamente, que lo incite a reflexionar, apoyándose en los puntos que ya se realizaron.

Complementando el cuestionario, en la tercera parte de éste se va a formular una última pregunta sobre la concepción que posee el estudiante sobre el infinito basado en las preguntas que acaba de responder; esto con el fin de reconocer si por medio del cuestionario el estudiante cambió su idea intuitiva sobre el infinito.

Finalmente, se entrevistó a los profesores responsables de las clases de Precálculo y Cálculo Diferencial, con el propósito de conocer la opinión y la perspectiva del docente respecto a los problemas que ha encontrado en sus estudiantes sobre el concepto de infinito y las posibles soluciones/precauciones que ha tomado, basado en su experiencia. Se utilizó la técnica de entrevista en profundidad, en la que se tiene una interacción entre el entrevistador y el entrevistado por medio de la formulación de preguntas ya preparadas para soportar la información, registrarla y analizarla.

Metodología del análisis

Para el análisis de resultados, en cada se pregunta se agruparon las respuestas similares en una respuesta general. El mismo proceso se llevó a cabo con estas últimas respuestas similares, agrupándolas en líneas base de respuesta. Cada respuesta y cada línea base van acompañadas con el porcentaje respecto de la cantidad total de estudiantes en la materia que están cursando. A continuación se ilustra la metodología del análisis de las distintas preguntas (tabla 1).

Tabla 1
Metodología de análisis utilizada

Pregunta X			
Línea base de respuesta 1	%	Respuesta general 1	%
		Respuesta general 2	%
		Respuesta general 3	%
Línea base de respuesta 2	%	Respuesta general 4	%
		Respuesta general 5	%
		Respuesta general 6	%
Línea base de respuesta 3	%	Respuesta general 7	%
Línea base de respuesta 4	%	Respuesta general 8	%
		Respuesta general 9	%

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Cuestionario aplicado

Para el análisis, se rotuló a los estudiantes de Precálculo como los estudiantes P y a los estudiantes de Cálculo Diferencial como los estudiantes C.

1. Diagnóstico

a) Pregunta 1: ¿Qué entiende por infinito? Las respuestas a esta pregunta se muestran en la tabla 2.

Tabla 2
Respuestas y consolidado a la pregunta 1

Precálculo			
Infinito potencial	83,3 %	Algo inalcanzable	20,8 %
		Una cantidad sin límite	58,3 %
		Cantidad innumerable	4,2 %
Otros	16,7 %	Representación de los números reales	4,2 %
		Los números, el universo, la estupidez humana	4,2 %
		Número muy grande	8,3 %
Cálculo Diferencial			
Infinito potencial	53,0 %	Algo que no tiene fin/límite	47,1 %
		Algo indeterminado	5,9 %
Otros	47,1 %	El universo	11,8 %
		Símbolo de algo muy grande, amplio o ilimitado	11,8 %
		Valor demasiado grande/pequeño sin un valor determinado	23,5 %

Es posible decir que ninguno de los estudiantes de los dos cursos posee la concepción de infinito actual; incluso en Precálculo el 83,3 % de los estudiantes poseen una noción de infinito potencial según las definiciones dadas por ellos mismos. Cabe señalar que existen estudiantes que entienden el infinito como un número o una representación.

En el caso de los estudiantes C, el 53 % maneja el concepto de infinito potencial, aunque, de igual manera que en precálculo, existen concepciones erróneas al definir el infinito como la representación, símbolo o valor de algún objeto.

b) Pregunta 2: ¿Ha estudiado anteriormente el concepto de infinito? El consolidado de las respuestas se muestra en la figura 1.

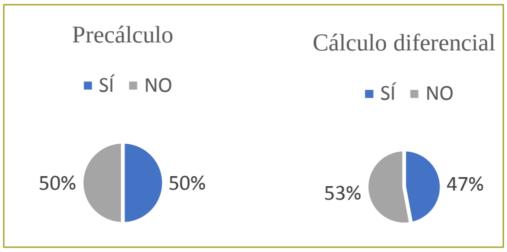


Figura 1. Consolidado de respuestas a la pregunta 2.

c) Pregunta 3: ¿Dónde le enseñaron el concepto de infinito? El consolidado de las respuestas se muestra en la figura 2.

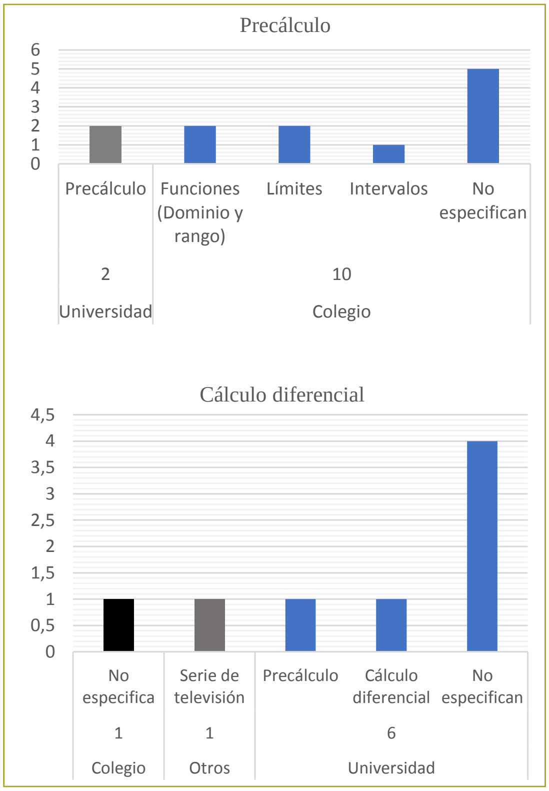


Figura 2. Consolidado de respuestas a la pregunta 2.

2. Prueba sobre infinito

a) Punto 1: ¿En algún momento la persona alcanza el punto B?

Tabla 3
Respuestas/consolidado al punto 1, prueba infinito

Pregunta 1 - Precálculo			
Sí	12,5 %	Son infinitas bisecciones que se acercan a B	8,3 %
		Aplicándose a la realidad, siempre es posible alcanzar un destino específico	4,2 %
No	87,5 %	Si A=0 y B=1, existen infinitos números entre 0 y 1	4,2 %
		Solo hay un punto medio entre B y el punto anterior	4,2 %
		Existe una cantidad infinita de puntos medios	79,2 %
Pregunta 1 – Cálculo Diferencial			
Sí	35,3 %	Pasará por todos los puntos medios y llegará	11,8 %
		B es el final del trayecto y en algún momento llegará	5,9 %
		Se recorre una distancia finita	17,6 %
No	64,7 %	Hay infinitos puntos medios antes de B	35,3 %
		B no es el punto medio de ningún otro punto	11,8 %
		Tiende a B (no lo alcanza)	17,6 %

En esta primera pregunta, basada en la paradoja de la dicotomía de Zenón, es posible apreciar que algunos alumnos están trabajando en el ámbito del infinito actual, ya que el 8,3 % de los estudiantes P indicaron que efectivamente se llega al punto B y lo justifican diciendo que existen infinitas bisecciones que tienden a este punto, y el 11,8 % de los estudiantes C llegan a la misma conclusión.

Por otro lado, el 83,4 % de los estudiantes P y el 52,9 % de los estudiantes C están trabajando con una concepción de infinito potencial, ya que responden que es imposible recorrer infinitos puntos y llegar al punto B. Un dato interesante es que teniendo en cuenta a los estudiantes C que trabajan con el concepto de infinito potencial, 17,6 % reconocen que los puntos medios de los segmentos tienden al punto B, pero sin que eso implique que se logra alcanzar el punto B en algún instante. Así mismo, es importante reconocer que un 4,2 % en Precálculo y 23,5 % en Cálculo Diferencial evitan el concepto de infinito y trabajan de manera finita, limitándose a un segmento de recta finita, por lo que concluyen que sí se debe alcanzar el punto B.

b) Punto 2. ¿Cuál cree que es el valor de esta suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$*?*

Tabla 4
Respuestas y consolidado al punto 2, prueba infinito

Precálculo			
Infinito	33,3 %	Denominador 2^n tiende a infinito	4,2 %
		Suma infinita de valores es infinito	25,0 %
		No hay una expresión que muestre el fin de la suma	4,2 %
No da un valor	33,3 %	Doble de la fracción anterior	12,5 %
		Un valor entre 0,5 y 1, pero no 1	16,7 %
		$1/x^2$ con $x \geq 2$. No se puede representar con un número	4,2 %
No se puede determinar	25,0 %	El valor de la suma sigue aumentando	25,0 %
1	8,3 %	Se suman las partes de la unidad	4,2 %
		En algún momento infinito llega a 1	4,2 %
Cálculo Diferencial			
Infinito	23,5 %	Suma infinita de valores es infinito	23,5 %
No da un valor	11,8 %	∞/∞ , ya que los valores crecen indefinidamente	5,9 %
		$x - 1/x$, donde x es el común denominador de la suma	5,9 %
No se puede determinar	29,4 %	Está sumando infinitamente	23,5 %
		El denominador crece exponencialmente	5,9 %
$1/2^k$	11,8 %	Siendo k la respuesta anterior	11,8 %
Cercano a 1	17,6 %	Cuando se suma la mitad del anterior, siempre faltará el doble del siguiente	5,9 %
		A medida que aumenta el denominador más pequeño, se llega al numerador	5,9 %
		El denominador crece exponencialmente	5,9 %
Cercano a 0	5,9 %	Es una sucesión infinita de n números	5,9 %

De los estudiantes P, el 8,3 % respondieron que la suma efectivamente es 1, mientras que en los estudiantes C no hubo ninguna respuesta que trabajara con el infinito actual. En los estudiantes P, el 25 % concluyó que no se podía determinar el valor porque seguía aumentando y el 33 % dijo que el resultado es infinito; todo esto debido a que se encuentran trabajando el infinito potencial.

Algo similar ocurre con los estudiantes C; el 76,4 % de los estudiantes trabajan con el infinito potencial, donde el 23,5 % dicen que la suma da infinito, el 29,4 % que no se puede determinar, el 17,6 % que se acerca a uno y el 5,9 % que se acerca a cero.

c) Punto 3a). ¿Qué pasa con la gráfica de la función para valores muy grandes de x (figura 3)? Justifique su respuesta

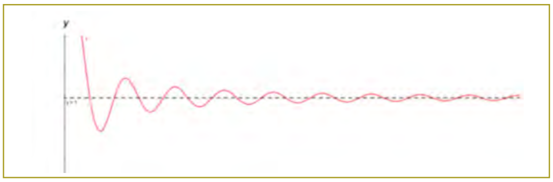


Figura 3. Consolidado de respuestas a la pregunta 2.

Tabla 5
Respuestas/consolidado al punto 3a), prueba infinito

Pregunta 3, parte a). Precálculo	
Se convierte en una función lineal	4,2 %
Empieza a acercarse al eje x	8,3 %
Se acercará a y=1	54,2 %
Siempre va a variar	12,5 %
Continúa alargándose horizontalmente	8,3 %
Disminuye el valor en y	8,3 %
No se sabe, ya que sólo se muestra una parte de la gráfica	4,2 %
Pregunta 3, parte a). Cálculo Diferencial	
Tiende a infinito	11,8 %
Empieza a acercarse al eje x	17,6 %
Se acercará a y=1	41,2 %
Se acercará a su asíntota	11,8 %
Siempre va a variar	11,8 %
Se disminuirá su rango	5,9 %

d) ¿Puede determinar el valor de la función cuando x se hace muy grande? Justifique su respuesta

Tabla 6
Respuestas/consolidado al punto 3b), prueba infinito

Pregunta 3 - Parte b - Precálculo			
Sí	16,7 %	Será cada vez más pequeño en y	4,2 %
		Es posible encontrar su imagen	12,5 %
No	75,0 %	No existe la cantidad suficiente de datos	4,2 %
		La gráfica siempre está variando	12,5 %
		No se conoce la ecuación	4,2 %
		Número cercano a 0 pero nunca será 0	8,3 %
		Número cercano a 1 pero nunca será 1	4,2 %
		La función es infinita	33,3 %
		No justifica	4,2 %
		La gráfica no tiene x	4,2 %
No responde		8,3%	
Pregunta 3, parte b. Cálculo Diferencial			
Sí	35,3 %	Tiende a 0	5,9 %
		Evaluando la función en un intervalo	5,9 %
		Tiende a 1	23,5 %
No	58,8 %	Puede ser cualquier valor, ya que va hacia infinito	5,9 %
		No se conoce la función de la gráfica	17,6 %
		Puedo acercarme, mas no dar un valor exacto	11,8 %
		Infinito no tiene un valor específico	5,9 %
		Número cercano a 1 pero nunca será 1	17,6 %
No responde		5,9 %	

En esta pregunta, tanto en la parte a) como en la parte b), ningún alumno trabajó con el concepto de infinito actual. Todas las respuestas dadas están dentro de un infinito potencial, ya que se refieren a casos donde la función se acerca a un determinado valor, o nunca para de variar, por lo que consideran que no es posible determinar un valor, pues no existe un límite con el cual trabajar.

e) Punto 4.Prueba infinito. Considere la siguiente suma: ¿puede decir para qué valor de n (enteror) la suma es igual a 1?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Aunque este punto es una reformulación del punto 2, se observa que el porcentaje de estudiantes que trabajan con el infinito potencial es nulo en ambos cursos, ya que entre sus justificaciones está que el valor nunca es 1 o el valor será aproximado a 1 pero no exactamente 1. El 23,5 % de los estudiantes C se acercaron a la respuesta correcta al asegurar que la solución se da cuando n es infinito, pero, responden que la suma sólo se acerca a 1 y, por lo tanto, se está trabajando en el infinito potencial.

Tabla 7
Respuestas y consolidado al punto 4 de la prueba sobre infinito

Pregunta 4. Precálculo			
No respondió			12,5 %
No	87,5 %	Valor se aproxima a 1 pero no es 1	4,2 %
		Ningún número dividido en 1 da 1	4,2 %
		Es una suma infinita	45,8 %
		Está en el intervalo entre 0 y 1	8,3 %
		Le falta una parte para completar el entero	4,2 %
		Sumar dos números consecutivos, de la forma planteada, no da 1	12,5 %
		El siguiente número siempre aumenta en una unidad	4,2 %
		Todos son números positivos	4,2 %
Pregunta 4. Cálculo Diferencial			
No respondió			23,5 %
No	76,5 %	Cada fracción tiende a 0	5,9 %
		Sólo puedo acercarme cuando n es infinito	23,5 %
		Sin importar el n, la suma está entre 3/2 e infinito	5,9 %
		Sumar fraccionarios no daría 1	29,4 %
		n no está definida	5,9 %
		Denominador cada vez más grande	5,9 %

Las cuatro preguntas anteriores, como se ha mencionado, están basadas en la paradoja de la dicotomía de Zenón. De éstas, es posible observar que al cambiar la forma en que se plantea el problema, el porcentaje de estudiantes que trabajan con el infinito potencial varía, lo que quiere decir que el estudiante está oscilando entre los dos conceptos de infinito y dependiendo del contexto utiliza alguno de los dos. Así mismo, en el curso de Cálculo Diferencial se evidenció un uso del concepto de infinito actual únicamente en la pregunta 1, mientras que en el curso de Precálculo, el uso de infinito actual se evidenció tanto en la pregunta 1 como en la pregunta 2.

f) Punto 5, prueba infinito: ¿Cuál de los conjuntos (números naturales o números pares) tiene mayor, igual o menor cantidad de elementos?

Tabla 8
Respuestas y consolidado al punto 5, prueba sobre infinito

Pregunta 5. Precálculo			
Números naturales	12,5 %	Existe el doble de números naturales que de números pares	4,2 %
		Los números naturales incluyen a los números pares	8,3 %
Números pares	20,8 %	Contienen un número adicional: 0	12,5 %
		Tienen los pares negativos y fraccionarios pares	8,3 %
Igual cantidad	50,0 %	Ya que existen infinitos números	33,3 %
		Los pares pueden tomar valores positivos y negativos	16,7 %
No se puede saber	12,5 %	Los números son infinitos	8,3 %
		Hay que limitarlos	4,2 %
No se pueden comparar	4,2 %	Los números son infinitos	4,2 %
Pregunta 5. Cálculo Diferencial			
Números naturales	29,4 %	Los números naturales contienen a los números pares	17,6 %
		No justifica	5,9 %
		Incluyen todos los números	5,9 %
Números pares	5,9 %	Contiene a los pares negativos y el cero	5,9 %
Igual cantidad	64,7 %	Ambos son infinitos	47,1 %
		Al tomar una cantidad finita tienen la misma cantidad. (empareja negativos con impares)	5,9 %
		Si se toman los pares positivos	5,9 %
		No puede existir un infinito más grande que otro	5,9 %

Este punto busca abrir la posibilidad a una reflexión sobre conjuntos infinitos contenidos en otro con esta misma característica, y de esta manera preparar al estudiante para la pregunta número 6.

Se evidencia que, en el grupo de Precálculo, el 50 % de los estudiantes contestan que los dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos, justificándolo de dos maneras diferentes; una de ellas (la que llama más la atención) es que los estudiantes se acercan a hacer una correspondencia entre dos conjuntos infinitos para determinar si hay o no una igualdad en sus cardinalidades, correspondiendo al 16,7 %.

Por el lado de los estudiantes C, el 64,7 % responden que hay igual cantidad de elementos. De éstos, el 47,1 % justifican que se debe a que los dos conjuntos tienen infinitos elementos; por otro lado, el 5,9 % dice que no puede haber un infinito más grande que otro. Sin embargo, un porcentaje de estudiantes logra crear una correspondencia análoga a la presentada por los estudiantes P, aunque una de las respuestas se llevó a un contexto finito, mientras que la otra sí se plantea correctamente, como se puede apreciar en la tabla.

Dentro de los estudiantes P, el 12,5 % indica que no es posible saber y el 4,2 % que no se pueden comparar los conjuntos porque son infinitos. Esto revela que el 16,7 % de los estudiantes responden basándose en el concepto de infinito potencial, ya que intuyen que siempre habrá un elemento más con el que se pueda hacer una comparación en alguno de los dos conjuntos.

g) Punto 6. En la figura 4, ¿el segmento AB representa el mismo número de puntos que el segmento CD?

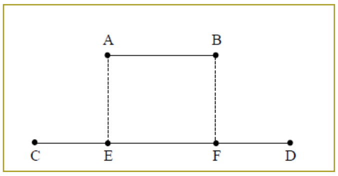


Figura 4. Esquema para las preguntas 6 y 7 de la prueba sobre infinito.

Esta pregunta plantea de manera análoga la pregunta 5, pero en un contexto geométrico. Los estudiantes P que respondieron acertadamente fueron el 8,3 %, reconociendo que los dos segmentos, sin importar su tamaño, poseen infinitos puntos y por lo tanto son iguales, mientras que el porcentaje en los estudiantes C fue de 35,3 %; aunque en los estudiantes C se presentó otra justificación que viene del punto anterior y dice que tienen que ser iguales, ya que no pueden existir infinitos más grandes que otros (5,9 %). Es importante recalcar que el 45,8 % de los estudiantes P trabajan con el concepto de infinito potencial, pues afirman que al ser infinitos no se puede determinar si representan el mismo número de puntos.

Tabla 9
Respuestas y consolidado al punto 6

Pregunta 6. Precálculo			
Sí	8,3%	Cada segmento tiene una cantidad infinita de puntos	8,3 %
No	45,8 %	Un segmento es una sucesión de puntos y tiene más puntos el segmento CD	29,2 %
		Así existan infinitos puntos en los segmentos, AB y CD tienen fin, por lo que CD tiene más puntos	16,7 %
No se sabe	45,8 %	No se conoce la cantidad de puntos que conforman los segmentos	4,2 %
		Siempre va a existir un punto entre otros dos	4,2 %
		Cada segmento tiene una cantidad infinita de puntos	37,5 %
Pregunta 6. Cálculo Diferencial			
Sí	41,2 %	Cada segmento tiene una cantidad infinita de puntos	35,3 %
		No puede existir un infinito más grande que otro	5,9 %
No	47,1 %	Longitud de CD es mayor que la del segmento AB	35,3 %
		Tienen infinitos puntos, pero el segmento CD tiene mayor magnitud de puntos	5,9 %
		El infinito de CD es más grande que el de AB	5,9 %
No se sabe	11,8 %	No está determinada la longitud de los segmentos	5,9 %
		Depende de la distancia establecida entre los puntos	5,9 %

h) Punto 7. En la figura 4, ¿el segmento AB representa el mismo número de puntos que el segmento EF?

Al trabajar con segmentos iguales se encontró que, aunque en su mayoría los estudiantes responden que los dos segmentos tenían la misma cantidad de puntos, únicamente lo justifican el 8,3 % y 41,2 % de los estudiantes P y C, respectivamente, sin limitarse a decir que los dos segmentos tienen la misma longitud. Cabe destacar una vez más que el 5,9 % de los estudiantes C afirman que no puede haber un infinito más grande que el otro y, por lo tanto, ambos segmentos deben representar el mismo número de puntos.

De estas tres preguntas anteriores, se evidencia que los estudiantes C tienen un mejor manejo del infinito que los estudiantes P, ya que una cantidad mayor de estudiantes responde de manera adecuada, sin limitarse a la finitud de los segmentos; además, en éstos no se evidencia ningún porcentaje de estudiantes que trabaje con el infinito potencial.

Tabla 10
Respuestas y consolidado al punto 7

Pregunta 7. Precálculo			
Sí	58,3 %	Cada segmento tiene una cantidad infinita de puntos	8,3 %
		Ambos segmentos tienen la misma sucesión de puntos finitos	4,2 %
		Tienen la misma longitud	37,5 %
		Ambos segmentos tienen la misma distancia y el mismo grosor	8,3 %
No se sabe	41,7 %	Cada segmento tiene una cantidad infinita de puntos	37,5 %
		No se puede definir, teniendo en cuenta los puntos que siempre existirán	41,2 %
Pregunta 7. Cálculo Diferencial			
Sí	88,2 %	Cada segmento tiene una cantidad infinita de puntos	41,2 %
		No puede existir un infinito más grande que otro	5,9 %
		Están unidos por los segmentos perpendiculares AE y BF	11,8 %
		Tienen la misma longitud	29,4 %
No	5,9 %	Los segmentos están ubicados en diferentes lados, por lo que no pueden representarse con el mismo punto	5,9 %
No se sabe	5,9 %	Depende de la distancia establecida entre los puntos	5,9 %

i) Punto 8 (ver anexo A, hotel de Hilbert)

Tabla 11
Respuestas y consolidado al punto 8a)

Pregunta 8. Parte a). Precálculo			
Sí	37,5 %	El número de habitaciones es infinito	33,3 %
		Se pueden construir habitaciones nuevas	4,2 %
No	50,0 %	El número de huéspedes es infinito	20,8 %
		Infinito no es un número y no se puede operar	8,3 %
		El hotel está ocupado al 100 %	20,8 %
No se sabe	4,2 %	El número de huéspedes es infinito	4,2 %
No respondió			8,3 %

Pregunta 8, parte a). Cálculo Diferencial			
Sí	88,2 %	El número de habitaciones es infinito	58,8 %
		Es una sucesión definida así: 1, 2, 2, 4, 3, 6, 6, *n*; donde *n* es un número impar y en la cual las habitaciones impares quedan desocupadas	5,9 %
		Los números impares son infinitos	23,5 %
No	5,9 %	El hotel está lleno	5,9 %
No se sabe	5,9 %	Depende de si el infinito de las personas y el de las habitaciones son proporcionales	5,9 %

Tabla 12
Respuestas y consolidado al punto 8b)

Pregunta 8, parte b). Precálculo			
Sí	41,7 %	Construir habitaciones cada vez que lleguen nuevas personas	8,3 %
		Misma solución con números impares	12,5 %
		Misma solución con números enteros positivos	4,2 %
		Misma solución con números primos	4,2 %
		Dividir las habitaciones y así ampliar la capacidad	4,2 %
		Asignar las últimas habitaciones disponibles a cada huésped nuevo	8,3 %
No	41,7 %	El hotel está ocupado al 100 %	29,2 %
		No justifica	12,5 %
No respondió			16,7 %
Pregunta 8, parte b). Cálculo Diferencial			
Sí	76,5 %	Enviar los huéspedes al infinito más grande que el del hotel	5,9 %
		Misma solución con números impares	35,3 %
		Misma solución moviéndolos a la habitación *kn*, con *k* entero fijo	5,9 %
		Con la siguiente sucesión: 1, 3, 3, 6, 6, 9, 9, *n*; donde *n* es un número par	5,9 %
		No justifica	5,9 %
		El número de habitaciones es infinito	5,9 %
		Mandar cada huésped a la siguiente habitación	11,8 %
No	23,5 %	No justifica	11,8 %
		Si un huésped entra, entonces algún otro huésped tiene que salir	5,9 %
		No se puede hacer lo mismo con los números impares	5,9 %

Para el hotel de Hilbert se encuentra que el 88,2 % de los estudiantes C concuerdan en que el procedimiento que se plantea es correcto. Las justificaciones correspondientes a este porcentaje permiten afirmar que estos estudiantes trabajaron sus respuestas con la noción de infinito actual, ya que no tienen problemas al hacer infinitos acomodamientos para desocupar y ocupar las infinitas habitaciones.

Por otro lado, el 37,5 % de los estudiantes P contestan afirmativamente, y sólo el 33,3 % justifica utilizando el concepto de infinito actual. Además, el 25 % de los estudiantes P trabajan con el infinito potencial al justificar que, como hay infinitos huéspedes, no es correcta la manera en que se plantea el problema.

3. Prueba final. Teniendo en cuenta las actividades realizadas, ¿qué puede decir sobre el concepto de infinito?

Tabla 13
Respuestas y consolidado a la prueba final.

Teniendo en cuenta las actividades realizadas, ¿qué puede decir sobre el concepto de infinito? - Precálculo	
Algo que nunca se podrá alcanzar	29,2 %
Algo que no tiene fin	16,7 %
Algo muy grande o demasiado pequeño	4,2 %
No se puede definir	20,8 %
No responde	12,5 %
Es algo subjetivo, que cambia dependiendo del problema	4,2 %
No se puede determinar	4,2 %
Concepto que puede dar diversas soluciones, muchas sucesiones	4,2 %
Algo con lo que no se puede realizar ninguna operación porque no es un número	4,2 %
Teniendo en cuenta las actividades realizadas, ¿qué puede decir sobre el concepto de infinito? – Cálculo – Cálculo Diferencial	
Elemento matemático indeterminado	5,9 %
Algo muy grande o demasiado pequeño	23,5 %
No se puede definir	29,4 %
No responde	5,9 %
Es algo subjetivo, que cambia dependiendo del problema	29,4 %
Hay infinitos más grandes que otros	5,9 %

Teniendo en cuenta las respuestas que dieron los estudiantes en la prueba diagnóstico a la pregunta 1, se observa que siguen teniendo afirmaciones como

"Algo que no tiene fin", "Algo sin límite", "Algo indeterminado". El 8,4 % de los estudiantes de Precálculo responden esta pregunta diciendo que el infinito es algo que puede tener diferentes soluciones, es decir, piensan en un infinito distinto para algunas de las preguntas de la prueba sobre el infinito.

Entrevista al profesor

1. Profesor de Precálculo

¿Cómo introduce el concepto de infinito a los alumnos?
R.: La única oportunidad que tuve para introducirlo fue cuando estábamos mirando el conjunto de los números reales, naturales, enteros... y se abordó una pregunta sobre cuál es el siguiente número real. Algunos estudiantes plantearon que no es posible encontrar el siguiente porque entre dos números siempre hay un montón de números. Esa fue la única oportunidad en el curso de plantear la pregunta sobre el infinito, porque el tema ya es de asíntotas; o sea, otras oportunidades no han sido posibles.

¿Qué obstáculos observa en los estudiantes relacionados con el concepto de infinito?
R.: El primer obstáculo que yo veo tiene que ver con la representación, porque para ellos infinito es un número… incluso llegan a operar con el infinito. Esa confusión de que infinito es un número, para mi obstaculiza el concepto mismo de infinito como cantidad de elementos, porque ellos confunden la representación.

¿Qué estrategias utiliza para superar estos obstáculos?
R.: La estrategia que usé para el ejemplo numérico fue que ellos mismos buscaran entre 0 y 1 cuántos elementos había, y hubo un estudiante que dijo que quería saber cuál era el número siguiente de cero. Entonces uno respondió que era 1, otro que 0,5, otro que 0,001…Entonces yo les dije que para la próxima clase me contaran cuál seguía realmente y ellos dijeron que no se puede porque entre dos números siempre va a haber otro. Entonces digamos que ahí les ayudé a que, al menos desde el punto de vista de la representación de la recta, rompieran con ese obstáculo planteando discusiones y como con tareas.

2. Profesor de Cálculo Diferencial

¿Cómo introduce el concepto de infinito a los alumnos?
R.: La noción de infinito se introduce cuando vamos a trabajar formalmente el tema de límites, para ver la diferencia de tomar una función y evaluar la función en un punto y la noción de límite en la función en el mismo punto. Entonces hay que mirar cuál es la diferencia de estar en el punto a "mirar", entre comillas, qué ocurre con la función cuando me estoy acercando al punto.

¿Qué obstáculos observa en los estudiantes relacionados con el concepto de infinito?
R.: Uno de los obstáculos más complicados es desligar el concepto de infinito como número, porque en ocasiones lo tienden a ver como número; entonces, si ven uno sobre infinito dicen que es cero, pero viendo la concepción de infinito como un número que se puede "palpar", entre comillas, entonces ese es, yo creo, el problema más grande que se evidencia. Por ejemplo, cuando uno quiere ver indeterminaciones… donde uno no puede ver el infinito como número e intentar hacer cuentas algebraicas con él.

¿Qué estrategias utiliza para superar estos obstáculos?
R.: La estrategia que yo uso para tratar de dar un alivio al tema del infinito es como mostrar una noción intuitiva de lo que significa el infinito. Entonces más o menos pensar en el sentido de que no puedo tomar el infinito, pero sí en cómo puedo acercarme.

CONCLUSIONES

Es posible afirmar que existe una mejora en el uso y la concepción que tienen los estudiantes de Cálculo Diferencial respecto al concepto de infinito actual en comparación con los estudiantes de Precálculo, ya que el porcentaje de estudiantes que utilizaron el infinito potencial fue mayor en el curso de Precálculo.

Sin embargo, esta mejora sólo se da en una cantidad mínima de estudiantes, lo que indica que, aunque durante el curso de Cálculo se introducen nociones como límite, los estudiantes no asimilan completamente el concepto de infinito actual. Es decir, no hay una diferencia concluyente entre la concepción que tiene un estudiante de Precálculo, con una idea intuitiva de infinito al no trabajar formalmente con éste, y la idea que tiene el estudiante de Cálculo Diferencial. Lo que concuerda con la bibliografía, pues "Estos resultados inducen a pensar que el conocimiento previo del cálculo diferencial o integral es de ayuda, pero no de una manera significativa o determinante, para establecer y reconocer las conexiones 'oportunas' y 'fundamentales' entre los problemas planteados, así como de potenciar la noción del infinito actual" (Garvin, 2005).

De igual manera, con la prueba diagnóstico se evidencia que algunos estudiantes de Cálculo Diferencial todavía poseen la idea del infinito como símbolo o número, que es un obstáculo que hay que considerar a la hora de trabajar matemáticamente con el límite. Esto es, apoyado en los obstáculos que los profesores detectan en sus grupos.

En el curso de Precálculo existe un porcentaje de estudiantes que, aunque no en todas las preguntas se mantuvo, usó la idea de infinito actual y además logró crear correspondencias entre conjuntos infinitos para determinar la igualdad de la cardinalidad entre éstos. Lo anterior puede servir como un indicio de que el estudiante en Precálculo puede estar preparado para introducir la noción de infinito actual y de esta manera llegar mejor preparado a Cálculo Diferencial, donde va a depender de la correcta utilización de ese concepto para avanzar debidamente. Es más, en la prueba final se puede evidenciar que el 5,9 % de los estudiantes de Precálculo asimilan la existencia de infinitos más grandes que otros, gracias a la actividad que acababan de realizar.

Por último, hay que considerar que los estudiantes llegan con una noción intuitiva del infinito, ya sea por su diario vivir, por el colegio o por algún profesor (Vera, Pinilla & Roa, 2010); es necesario tener en cuenta cómo las ideas intuitivas adquiridas en ambientes no escolares permean la construcción de conceptos matemáticos avanzados.

REFERENCIAS

Arrigo, G., & D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación Matemática, 11*, 5-24.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito.* México: UNAM.

Bombal, F. (2010). Un paseo por el infinito. *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 104*, 427-444.

Boyer, C. (2007). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

D'Amore, B. (1996). L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi. *La Matemática e la sua Didattica, 3*, 322-335.

Donald, A. (1999). *Lectures on the History of Mathematics: The History of Infinity.* Texas: Texas A&M University.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 29-44.

Garvin, S. (2003). Incoherencias y conexiones: el caso del infinito actual con estudiantes universitarios. Primera fase del estudio. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 16)*, (p. 16).

Garvin, S. & Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias, 20*, 87-113.

Garvin, S. (2005). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 23(1)*, 61-80.

López, C. (2014). El infinito en la historia de la matemática. *Ciencia y Tecnología, 14*, 277-298.

Moreno Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática (SEIEM)*, 81-96.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana*, 59-81.

Tall, D. (1980). The notion of infinity measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 271-284.

Vera, M., Pinilla, L.D. & Roa, S. (2010). El infinito: concepciones de los estudiantes que transitan del colegio a la universidad. *Comunicación presentada en el 11.° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (7 al 9 de octubre de 2010).* Bogotá.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 1*, 107-122.

ANEXO A: CUESTIONARIO APLICADO

Concepciones del infinito en estudiantes universitarios de primer año

Objetivo. Determinar las concepciones sobre el infinito que han desarrollado estudiantes que están cursando Precálculo.

Programa: ___________________________

I. Diagnóstico

1. ¿Qué entiende por "infinito"?

____

____

____

2. ¿Ha estudiado anteriormente el concepto de infinito?

SÍ ❑ NO ❑

Responda la siguiente pregunta únicamente si la respuesta anterior fue "SÍ"

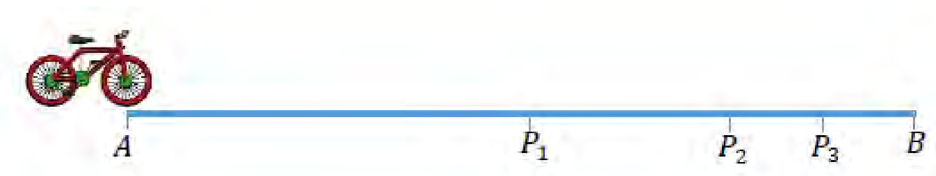
3. ¿Dónde le enseñaron el concepto de infinito?

____

____

II. Prueba sobre infinito

1. Una persona viaja en su bicicleta desde el punto A hasta el punto B, como se muestra en la figura.



Para hacer esto debe pasar por el punto $P1$, que es punto medio entre A y B. Después de esto debe pasar por $P2$, que es el punto medio entre $P1$ y B.

Si continúa pasando sucesivamente por los puntos medios de la distancia que le falta por recorrer, ¿en algún momento la persona alcanza el punto B? Explique su respuesta.

____

____

____

____

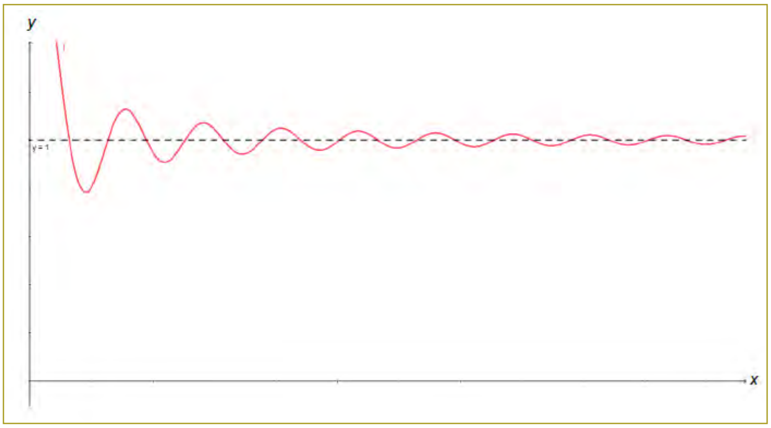
____

2. Considere la siguiente suma:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

¿Cuál cree que es el valor de esta suma? Explique su respuesta.

3. Observe la siguiente gráfica de una función:



a) ¿Qué pasa con la gráfica de la función para valores muy grandes de x? Justifique su respuesta.

b) ¿Puede determinar el valor de la función cuando x se hace muy grande? Justifique su respuesta.

4. Considere la siguiente suma:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

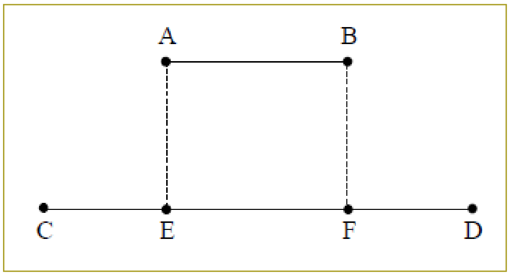
¿Puede decir para qué valor de n (entero) la suma anterior es 1? Explique su respuesta.

5. ¿Cuál de los siguientes conjuntos tiene mayor, igual o menor cantidad de elementos? Justifique su respuesta.

Números naturales o números pares.

____

Responda las preguntas 6 y 7 con base en la siguiente figura:



6. ¿El segmento AB representa el mismo número de puntos que el segmento CD? Justifique su respuesta.

7. ¿El segmento AB representa el mismo número de puntos que el segmento EF? Justifique su respuesta.

8. Lea atentamente la siguiente situación:

El hotel de Hilbert

Imaginen un hotel con un número infinito de habitaciones, donde la ocupación del hotel es del 100 %; es decir, todas las habitaciones están ocupadas por una persona. Las habitaciones son individuales, por lo que no pueden coincidir dos personas en la misma habitación. A nuestro hotel viene un nuevo huésped y pide una habitación.

– ¡Claro que sí! –exclama el administrador del hotel.

Después de esto, el administrador traslada la persona que ocupa anteriormente el cuarto N.° 1 al cuarto N.° 2, el ocupante del cuarto N.° al N.° 3, el ocupante del cuarto N.° 3 al N.° 4, y así sucesivamente. Al nuevo huésped se le da la llave de la habitación N.° 1, que quedó totalmente libre.

Una vez que comienza la temporada de vacaciones, llega un número infinito de nuevos huéspedes que vienen y piden habitaciones.
– ¡Sigan!, ni más faltaba –dice el administrador del hotel-
El propietario pasa al ocupante del cuarto N.° 1 al N.° 2, el del N.° 2 al N.° 4, el del N.° 3 al N.° 6, y así sucesivamente. De esta manera, todas las habitaciones con número impar quedan desocupadas y es posible acomodar a todos los nuevos huéspedes.

a) Al final, ¿el administrador consiguió acomodar a todos los huéspedes? Explique su respuesta.

b) ¿Puede plantear otra forma de organizar a los huéspedes? Explique su respuesta.

III. Prueba final

Teniendo en cuenta las actividades realizadas, ¿qué puede decir sobre el concepto de infinito?