

Modelación con diferencias finitas del comportamiento dinámico de suelos estratificados sometidos a cargas en superficie: caso 2D

Modeling with finite differences of the dynamic behavior of stratified soils subjected to surface loads: 2D case

MAXIMILIANO VILLADIEGO ESTRADA¹ - RICARDO SALAZAR FERRO²

1. Magíster en Ingeniería Civil de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

2. Profesor de la Maestría en Ingeniería Civil, consultor e investigador en geotecnia.

maximiliano.vestrada@mail.escuelaing.edu.co - ricardo.salazar@escuelaing.edu.co

Recibido: 30/06/2018 Aceptado: 15/08/2018

Disponible en http://www.escuelaing.edu.co/es/publicaciones_revista

<http://revistas.escuelaing.edu.co/index.php/reci>

Resumen

Siempre que se concibe un proyecto de ingeniería, lo primero que se debe entender es que éste deberá estar vinculado al suelo mediante un sistema suelo-fundación, y que la correcta interacción entre el suelo y dicha fundación debe ser la que garantice la estabilidad geotécnica y estructural del proyecto.

Debido a que las máquinas y equipos mecánicos que generan vibraciones forman parte de los sistemas de producción en la industria energética, minera, siderúrgica, de petróleos, etc., es muy común que los ingenieros se encuentren con la necesidad de diseñar la cimentación de este tipo de equipos, razón por la cual es fundamental el adecuado conocimiento del comportamiento del sistema máquina-fundación-suelo. Por lo anterior, en este proyecto se quiere analizar el comportamiento de un sistema máquina vibratoria-fundación-suelo, para un suelo de dos estratos y un cimiento de longitud infinita.

El presente proyecto se desarrolla mediante el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD, por su sigla en inglés), a través de un programa que se escribirá en el lenguaje Fortran 90 usando la plataforma libre Intel Visual Studio, en la que se propone un modelo que contiene las cargas estáticas de la fundación y dinámicas de la máquina vibratoria, además de la geometría del cimiento y parámetros del suelo.

Palabras claves: suelo, máquina, vibraciones, cimentación, carga dinámica, diferencias finitas, desplazamientos, esfuerzos.

Abstract

Whenever an engineering project is conceived, the first thing that must be understood is that it must be linked to the soil through a soil-foundation system, and that the correct interaction between the soil and the foundation must guarantee geotechnical and structural stability of the project.

Because the machines and mechanical equipment that generate vibrations are part of the various production systems in the energy industry (mining, steel, oil, etc.), it is very common for engineers to find the need to design the foundation type of equipment, which is why the adequate knowledge of the behavior of the machine-foundation-soil system is fundamental. Therefore, this project aims to analyze the behavior of a vibratory-foundation-soil machine system, for a soil of two strata and a foundation of infinite length.

The present project is developed by means of the method of finite differences in the time domain (FDTD), through a program that will be written in the Fortran 90 language using the free platform Intel Visual Studio, where a model that contains the static loads of the foundation and dynamics loads of the vibratory machine is proposed, in addition to the geometry of the foundation and soil parameters.

Keywords: soil, machine, vibrations, foundations, dynamic load, finite differences, displacements, efforts.

INTRODUCCIÓN

Las fundaciones pueden estar sometidas a cargas estáticas o dinámicas, o a una combinación de las dos. Las cargas estáticas no inducen ninguna vibración en el sistema fundación-suelo, en tanto que las cargas dinámicas sí conducen a una vibración del sistema. Estas últimas producen efectos indeseables tanto en el suelo como en la cimentación misma o estructuras cercanas, por lo que se hace necesario la implementación de cimentaciones que mitiguen dichos efectos. Las vibraciones que son de interés en esta tesis son las debidas a máquinas de movimiento alternativo, tipo rotativo e impacto, ya que las vibraciones causadas por estas máquinas al sistema fundación-suelo pueden analizarse con base en el fenómeno de movimiento armónico.

Hoy por hoy, los sistemas de producción cuentan con máquinas más grandes y de mayores velocidades, que por consiguiente han generado mayor impacto en los sistemas fundación-suelo. A mayores frecuencias de oscilación de los equipos mecánicos se inducen vibraciones más importantes en el suelo, y si estas vibraciones llegan a producir resonancia en el sistema o amplitudes de vibración mayores que los límites especificados por los fabricantes de la máquina, pueden afectar la estabilidad del sistema. Debido a ello es importante conocer el comportamiento del suelo sometido a cargas dinámicas, con el fin de poder diseñar cimentaciones que limiten las vibraciones que se transmiten al suelo o, en su defecto, poder determinar la competencia del suelo para responder adecuadamente a las solicitaciones de esfuerzos a que se expondrá. Normalmente, se limitan las vibraciones en el sistema construyendo cimentaciones muy pesadas, cuyo inconveniente es que le generan grandes sobreesfuerzos al suelo y producen, por tanto, notables deformaciones.

Los problemas elastodinámicos de deformación de sólidos se resuelven mediante la integración de lo que se conoce como la ecuación de onda elástica, la cual es una ecuación en derivadas parciales, lineal de segundo orden, que tiene soluciones cerradas particulares (Lamb, 1904). Estas soluciones se aplican principalmente para espacios infinitos o medios semiinfinitos con configuraciones simples de estratigrafía y de carga.

Sin embargo, en los problemas de ingeniería la geometría del dominio no siempre permite encontrar este tipo de soluciones cerradas, mientras que para de-

sarrollar soluciones en dominios complejos es necesario hacer una integración numérica aproximada.

La mejor manera de solucionar los problemas dinámicos de deformación es mediante integrar la ecuación de onda elástica usando el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo, en teoría, para dominios de cualquier geometría tridimensional y un sinnúmero de condiciones de carga.

En este trabajo se hace un estudio paramétrico del problema del cimiento flexible de longitud infinita, y a partir del algoritmo de Virieux se analiza la distribución de esfuerzos y deformaciones en la masa de suelo, para un sistema bicapa. Jean Virieux, en su trabajo titulado *P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method*, publicado en 1986 (Virieux, 1986), presentó las ecuaciones elastodinámicas integradas con diferencias finitas de segundo orden de aproximación, en el dominio del tiempo y en coordenadas cartesianas, aplicable para medios heterogéneos generales, donde la homogeneidad es un caso especial.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

La ecuación de Navier¹ es la que rige la propagación de ondas en un sólido continuo, elástico, homogéneo e isótropo. Esta ecuación es una ecuación diferencial que se puede expresar en varios esquemas: desplazamiento, desplazamiento-esfuerzo, velocidad-esfuerzo. En esta tesis se trabaja el esquema velocidad-esfuerzo, hecho por Virieux (1986).

Las ecuaciones de Navier se pueden desarrollar en diferentes sistemas de coordenadas, pero en el artículo de Virieux se trabaja la ecuación de Navier en coordenadas cartesianas. Las ecuaciones diferenciales visco-elastodinámicas usadas por Jean Virieux en su artículo se agrupan como sigue (ecuación 1).

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathbf{b} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \quad (\text{Ec. 1a})$$

1. Juan A. Pérez Ruiz (2007). "Un método de diferencias finitas para el análisis de la propagación de ondas. Aplicación al modelado de la respuesta sísmica de estructuras geológicas en entornos de computación en paralelo", 18 pp.

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial t} = b \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \quad (\text{Ec. 1b})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \quad (\text{Ec. 1c})$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \quad (\text{Ec. 1d})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \right) \quad (\text{Ec. 1e})$$

Donde b es el inverso de la densidad (ρ), λ y μ son primer y segundo parámetro de Lamé.

Virieux analiza el problema de distribución de esfuerzos usando el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD), considerando el problema de distribución en pequeñas particiones espaciales al dividir la región del espacio 2D en una grilla espacial, en la cual las velocidades y los esfuerzos son alternadamente distribuidos en posiciones discretas con el fin de poder resolver las ecuaciones viscoelastodinámicas. Las derivadas parciales son discretizadas remplazándolas por operadores de diferencias finitas, en el espacio y en el tiempo, para convertir las ecuaciones diferenciales en aproximaciones de tipo algebraico. Una vez hecho lo anterior, las ecuaciones de diferencias finitas permiten calcular el valor de las derivadas de una función en un punto a partir de los valores de la función en otro punto del dominio, previa construcción de un arreglo de ecuaciones que calcule los campos en un instante de tiempo futuro con base en los valores de campo en un instante pasado.

Los operadores de diferencias finitas utilizados son centrados de segundo orden y de un paso, debido a que el método se basa en el algoritmo de Yee. Se dice que son centradas de un paso debido a que Yee usa diferencia finita espacial de $\pm 1/2 \Delta x$ y diferencia finita temporal de $\pm 1/2 \Delta t$ alrededor del punto de observación, en vez de usar Δx o Δt , dando lugar a un operador de diferencia finita con cociente Δx o Δt , en lugar de $2(\Delta x)$ o $2(\Delta t)$, como ocurre en los esquemas convencionales.

Los operadores de diferencias finitas centrados de segundo orden respecto al espacio se pueden escribir en la siguiente forma:

$$\frac{dU_{i,j}}{dx_i} \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta} \approx \frac{U_{i+1/2,j} - U_{i-1/2,j}}{\Delta} \quad (\text{Ec. 2})$$

Los operadores de diferencias finitas centrados de segundo orden respecto al tiempo se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\frac{dU(x,z,t)}{dt} = \frac{U_{(x,z)}^{k+1/2} - U_{(x,z)}^{k-1/2}}{\Delta t} \quad (\text{Ec. 3})$$

Al remplazar los operadores centrados con paso de un delta (ecuaciones 2 y 3) en las Ecuaciones 1(a, b, c, d, e) y despejando para el tiempo $k+1/2$, en el caso de las velocidades, y para el tiempo $k+1$, en el caso de los esfuerzos, se obtienen las expresiones discretizadas del artículo (Virieux, 1986), así:

$$U_{i,j}^{k+1/2} = U_{i,j}^{k-1/2} + b_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\Sigma_{i+1/2,j}^k - \Sigma_{i-1/2,j}^k \right) + b_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\Xi_{i,j+1/2}^k - \Xi_{i,j-1/2}^k \right) \quad (\text{Ec. 4a})$$

$$V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} = V_{i+1/2,j+1/2}^{k-1/2} + b_{i+1/2,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\Xi_{i+1,j+1/2}^k - \Xi_{i,j+1/2}^k \right) + b_{i+1/2,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(T_{i+1/2,j+1}^k - T_{i+1/2,j}^k \right) \quad (\text{Ec. 4b})$$

$$\Sigma_{i+1/2,j}^{k+1} = \Sigma_{i+1/2,j}^k + (l+2m)_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(U_{i+1,j}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2} \right) + l_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} - V_{i+1/2,j-1/2}^{k+1/2} \right) \quad (\text{Ec. 4c})$$

$$T_{i+1/2,j}^{k+1} = T_{i+1/2,j}^k + (l+2m)_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} - V_{i+1/2,j-1/2}^{k+1/2} \right) + l_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(U_{i+1,j}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2} \right) \quad (\text{Ec. 4d})$$

$$\Xi_{i,j+1/2}^{k+1} = \Xi_{i,j+1/2}^k + m_{i,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(U_{i,j+1}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2} \right) + m_{i,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} - V_{i-1/2,j+1/2}^{k+1/2} \right) \quad (\text{Ec. 4e})$$

Donde K es el índice para discretización del tiempo. i,j son los índices para discretización de los ejes X y Z, respectivamente.

Δt es el tamaño de la cuadrícula del tiempo (tamaño de paso del tiempo).

Δx y Δz representa el tamaño de la cuadrícula para los ejes X y Z, respectivamente (tamaño de paso del espacio).

l y m representan coeficientes de Lamé (λ , μ); $\left[\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right]$, y, $\left[G = \mu = \frac{\tau}{\lambda} = \frac{E}{2(1+\nu)}\right]$.

$(U_{ij}, V_{ij}) = (v_x, v_z)$ son las velocidades numéricas en tiempo $(k + 1/2)\Delta t$ calculadas para velocidades en tiempo $(k - 1/2)\Delta t$ y esfuerzos en el tiempo $k\Delta t$, es decir, las velocidades quedan calculadas en instantes intermedios de tiempo con base en velocidades y esfuerzos del instante anterior.

$(\Sigma, \Xi, T) = (\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz})$ son los esfuerzos numéricos en el tiempo $(k + 1)\Delta t$ calculados explícitamente para velocidad en el tiempo $(k - 1/2)\Delta t$ y esfuerzos en el tiempo $k\Delta t$; es decir, los esfuerzos quedan calculados en instantes enteros de tiempo para velocidades y esfuerzos del instante anterior.

Así, conocidas las velocidades y esfuerzos de un instante de tiempo anterior, se podrán calcular velocidades y esfuerzos de un instante de tiempo actual y así sucesivamente los valores de los campos en el siguiente paso de tiempo.

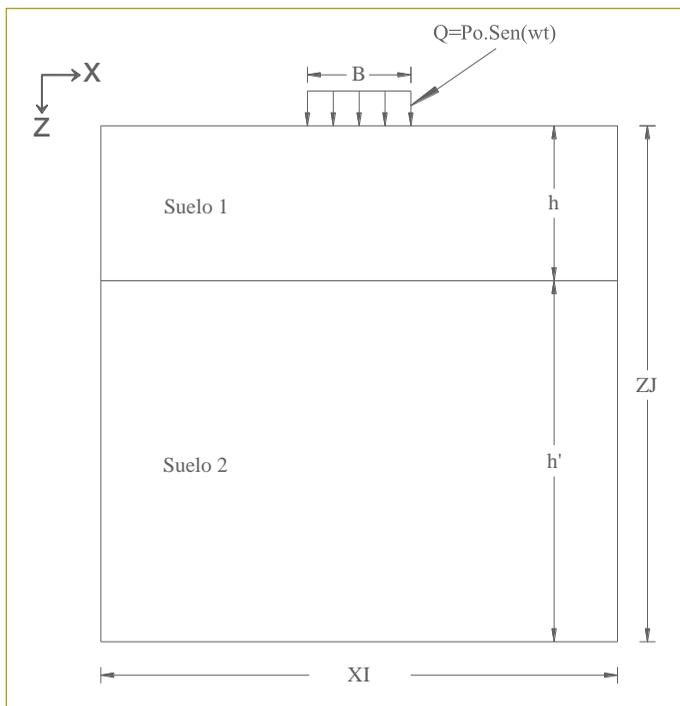


Figura 1. Esquema que ilustra el modelo numérico

Nota: Ancho de la carga uniformemente distribuida, comúnmente denominado B.

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo, las ecuaciones discretizadas de FDTD se implementaron en un código escrito en lenguaje Fortran 90 con el objeto de poder modelar el comportamiento de un dominio geotécnico bicapa (dos estratos de suelo), a partir de un modelo elástico lineal, al cual superficialmente se le aplica una faja de carga dinámica de ancho finito y longitud infinita. Para este fin se definió un modelo numérico cuyo dominio espacial y temporal es representado por los estratos de suelo en un espacio semiinfinito y una secuencia de carga en el tiempo (en la figura 1 se esquematiza el dominio de suelo del modelo numérico).

El modelo numérico consideró una dimensión del modelo geotécnico $L=10B$ y $H=7B$ y un tiempo total de modelación de 1,0 s. El tiempo de modelación se distribuyó en tres etapas (historia de carga): una etapa inicial de 0,3 s que corresponde a la aplicación de la carga muerta (pseudostática), una segunda etapa de 0,3 s que corresponde al tiempo de vibración transitoria y representa la etapa en que comienza a actuar la vibración (carga dinámica) y su frecuencia crece desde cero hasta volverse constante, lo que hace que el movimiento de vibración se vuelve estable (constante), y los últimos cuatro segundos corresponden a un estado estable de vibración, el cual se puede extender por mucho tiempo. No obstante, en este trabajo se pudo determinar que para tiempos de vibración estable mayores que el analizado el comportamiento del suelo se mantiene similar, por lo que todas las modelaciones se hicieron para un tiempo de 1,0 s (figura 2).

En este trabajo se empleó un modelo elástico lineal para las simulaciones numéricas, considerándolo suficiente para representar la respuesta dinámica del suelo. En este modelo, los parámetros de rigidez del suelo son definidos únicamente mediante el módulo de Young, E , y la relación de Poisson, ν . Además, se introduce el módulo de rigidez al corte, μ , como parámetro de amortiguamiento que permita la disipación de energía del sistema.

Para efectos de las modelaciones, en esta tesis se va a usar un módulo de Poisson de 0,37 en todos los casos.

En esta investigación se verificó que los resultados del modelo implementado y sus gráficas fueran consistentes con los resultados publicados en los textos académicos de difundida aceptación en la comunidad geotécnica. Para la verificación de los resultados del modelo se seleccionó un modelo geotécnico de una sola

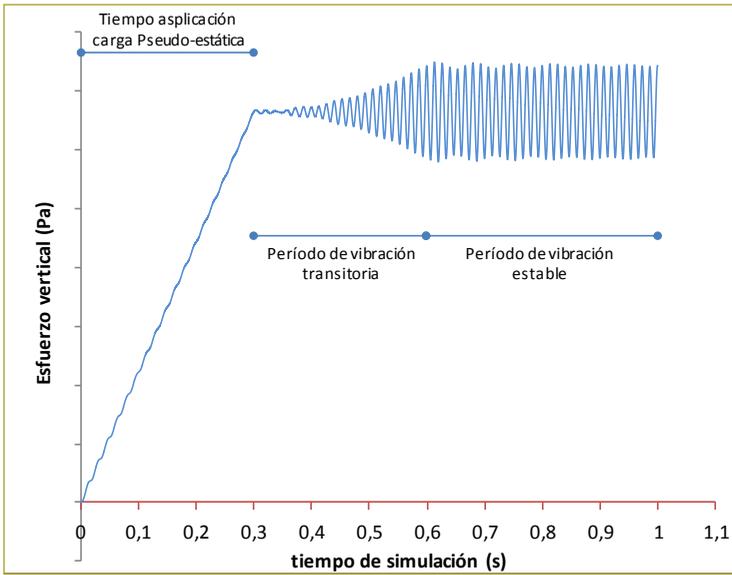


Figura 2. Historia de carga.

capa y se hicieron simulaciones en condición estática y condición dinámica, para representar los resultados como bulbo de esfuerzos o líneas isobaras con ayuda de algún programa de dibujo asistido por computador; dichas gráficas se compararon con las gráficas de modelos similares obtenidos de la solución de Boussinesq para esfuerzo vertical, debido a una carga continua de ancho finito y longitud infinita² (faja de carga), obtenidos a partir de otro código escrito en lenguaje Fortran 90. En la figura siguiente se muestra el esquema del modelo geotécnico de faja de carga y a continuación la ecuación que representa los esfuerzos en la masa de suelo (figura 3).

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_v = \frac{q}{\pi} [\alpha + \sin \alpha \cos (\alpha + 2\beta)]$$

Adicionalmente, se compararon los resultados de asentamientos calculados para faja de carga infinita, a partir de los esfuerzos obtenidos con el modelo de Virieux para suelo bicapa, con los resultados obtenidos a partir de las soluciones de Boussinesq y Steinbrenner.

El asentamiento elástico vertical de una cimentación superficial se puede estimar utilizando la teoría de la elasticidad, por ley de Hooke, con la siguiente expresión³:

2. Braja M. Das. Principles of Geotechnical Engineering, capítulo 10.
3. *Ibid.*, cap. 5.

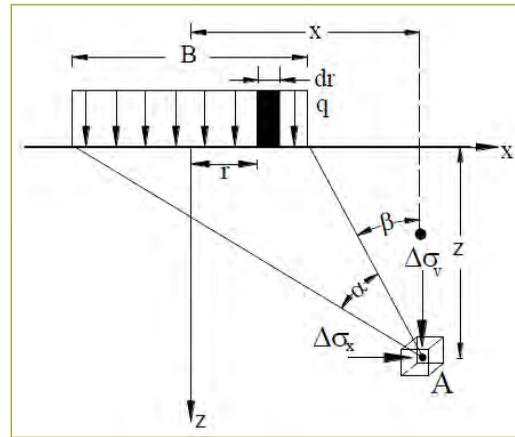


Figura 3 Incremento de esfuerzos debido a una carga continua, definición de los ángulos α y β y demás parámetros del modelo.

Fuente: Peter L. Berry-David Reid, *Mecánica de suelos*.

$$\Delta H = \int_0^z \varepsilon_z dz = \int_0^z \frac{1}{E_s} (\Delta\sigma_z - \nu_s \Delta\sigma_x - \nu_s \Delta\sigma_y)_z dz$$

Donde:

Q: carga uniformemente distribuida

E_s : módulo de elasticidad

ν_s : relación de Poisson

$\Delta\sigma_x, \Delta\sigma_y, \Delta\sigma_z$: incremento del esfuerzo debido a la carga neta aplicada sobre la cimentación en las direcciones x, y y z , respectivamente.

La ecuación de Steinbrenner (1934)⁴ para el cálculo de asentamientos en un punto debajo de una esquina de un área rectangular cargada es la siguiente:

$$\delta_e = \int_0^z \frac{QB}{E} (1 - \nu^2) I_p$$

Donde:

Q: carga uniformemente distribuida

B: ancho del cimiento.

E: módulo de elasticidad

ν : relación de Poisson

$$I_p = \left(F_1 + \frac{1-2\nu}{1-\nu} F_2 \right)$$

4. Joseph Bowles. *Foundation Analysis and Design*, 5th ed., p. 303.

F_1 y F_2 : factores de influencia de esfuerzos que varían con la profundidad y se obtienen con las siguientes expresiones:

$$F_1 = \frac{1}{\pi} \left[m \ln \frac{(1 + \sqrt{m^2 + 1}) \sqrt{m^2 + n^2}}{m(1 + \sqrt{m^2 + n^2 + 1})} + \ln \frac{(m + \sqrt{m^2 + 1}) \sqrt{n^2 + 1}}{m + \sqrt{m^2 + n^2 + 1}} \right]$$

$$F_2 = \frac{n}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{m}{n\sqrt{m^2 + n^2 + 1}} \right)$$

Donde:

$m=Z/B$, $n=L/B$

B y L: ancho y largo de la cimentación, respectivamente

Z: profundidad del punto analizado

En la solución de Steinbrenner, debido a que la profundidad (Z) del punto analizado se mide desde la superficie, entonces para suelo estratificado es necesario aplicar la siguiente expresión para obtener

I_p en el punto medio de cualquier estrato i , luego del primer estrato.

$$I_{p(i=n)} = \left(F_{1(n)} + \frac{1-2\nu_{(n)}}{1-\nu_{(n)}} F_{2(n)} \right) - \left(F_{1(n-1)} + \frac{1-2\nu_{(n)}}{1-\nu_{(n)}} F_{2(n-1)} \right)$$

RESULTADOS

Se hicieron las siguientes evaluaciones:

1. Gráfica de disipación de esfuerzos (líneas isobaras) a partir de la solución de Boussinesq vs. gráfica de disipación de esfuerzos en condición estática y dinámica a partir del modelo de Virieux (figuras 4a, b) y c)).
2. Sensibilidad del modelo geotécnico a la variación de la frecuencia de vibración, modelo de Virieux (tabla 1).

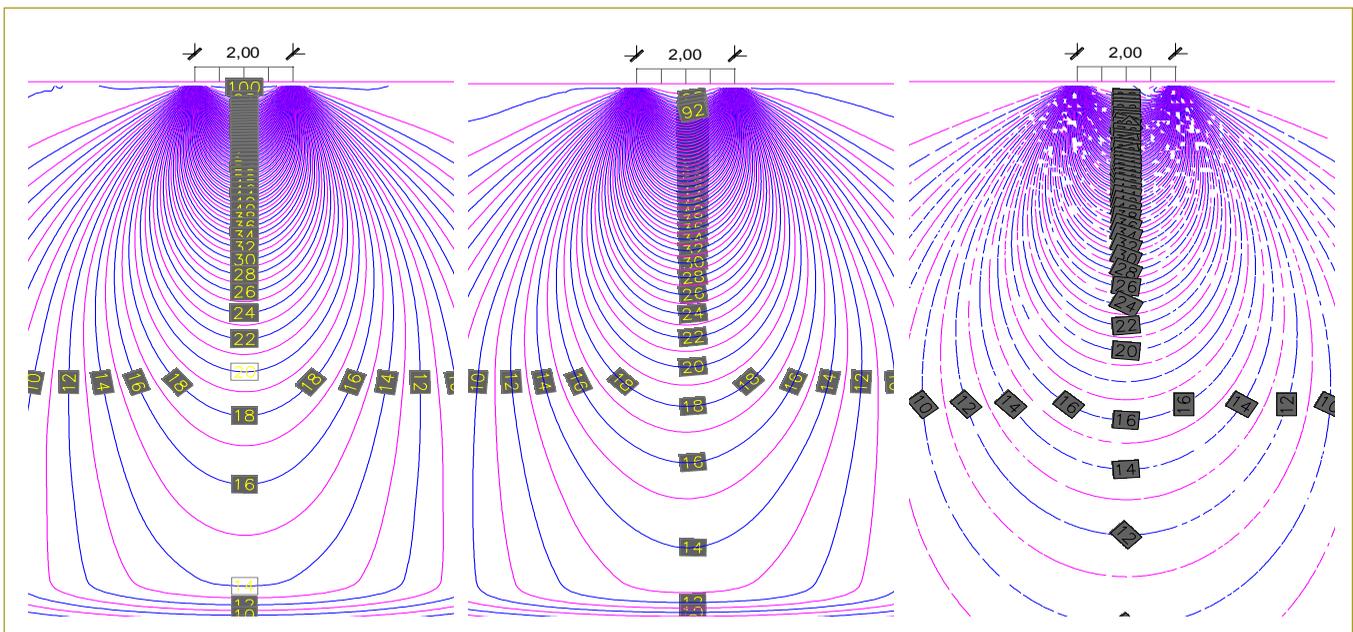


Figura 4. Bulbo de esfuerzos (isobaras) debido a carga continua infinita a) sin vibración – modelo Virieux, b) con vibración – modelo Virieux, c) sin vibración – solución de Boussinesq.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 1

Variación en la profundidad de disipación de esfuerzos para distintas frecuencias de vibración

Estrato superior, h (m)	Estrato inferior, h' (m)	B (m)	Fr (Hz)	u_1, u_2	E_1 (kN/m ²)	E_2 (kN/m ²)	Z $0,1\sigma_c$
14,0	0,0	2,0	10	0,37	22.500	-	6,1B
14,0	0,0	2,0	30	0,37	22.500	-	6,1B
14,0	0,0	2,0	800	0,37	22.500	-	6,2B
6,0	8,0	2,0	10	0,37	22.500	6.500	3,7B
6,0	8,0	2,0	30	0,37	22.500	6.500	3,8B
6,0	8,0	2,0	800	0,37	22.500	6.500	3,8B
6,0	8,0	2,0	10	0,37	6.500	22.500	6,2B
6,0	8,0	2,0	30	0,37	6.500	22.500	6,2B
6,0	8,0	2,0	800	0,37	6.500	22.500	6,2B
0,0	14,0	2,0	10	0,37	-	6.500	6,1B
0,0	14,0	2,0	800	0,37	-	6.500	6,1B
14,0	0,0	2,0	0	0,37	22.500	-	6,1B
0,0	14,0	2,0	0	0,37	-	6.500	6,2B

3. Variación del asentamiento vs. longitud del área cargada a partir de la solución de Boussinesq y la solución de Steinbrenner (tabla 2).

4. Variación en la profundidad de disipación del 90 % del esfuerzo impuesto en superficie en función de la relación largo/ancho del área cargada (tabla 2).

Tabla 2

Variación en la profundidad de disipación de esfuerzos y asentamientos para distintas longitudes del área cargada

Q (t/m ²)	B (m)	L (m)	* δ (cm)	** δ (cm)	$\frac{\delta_{\text{[área rectangular]}}}{\delta_{\text{[área cuadrada]}}}$ Boussinesq	$\frac{\delta_{\text{[área rectangular]}}}{\delta_{\text{[área cuadrada]}}}$ Steinbrenner	Z $0,1\sigma_c$
14,0	2,0	1,0B	3,98	3,87			2,05B
14,0	2,0	5,0B	6,68	6,36	1,68	1,64	4,34B
14,0	2,0	10,0B	7,29	6,78	1,83	1,75	5,43B
14,0	2,0	15,0B	7,45	6,83	1,87	1,76	5,94B
14,0	2,0	20,0B	7,50	6,81	1,88	1,76	6,15B
14,0	2,0	25,0B	7,51	6,79	1,89	1,75	6,28B
14,0	2,0	30,0B	7,52	6,78	1,89	1,75	6,28B
14,0	2,0	35,0B	7,53	6,76	1,89	1,75	6,28B
14,0	2,0	40,0B	7,53	6,76	1,89	1,75	6,28B

* Asentamiento elástico a partir de la solución de Boussinesq.

** Asentamiento elástico a partir de solución de Steinbrenner.

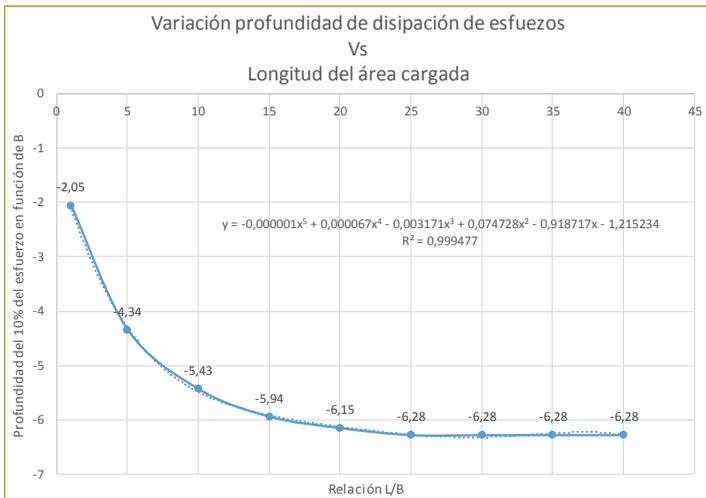


Figura 5. Variación de profundidad de disipación del 90 % del esfuerzo impuesto en superficie versus relación L/B del área cargada.

Fuente: Elaboración propia.

- Variación en la profundidad de disipación del 90 % del esfuerzo impuesto en superficie en función de la relación largo/ancho del área cargada (tablas 3 y 4).
- Variación de la deformación versus relación entre módulos de elasticidad (en las tablas 5, 6 y 7 se muestran los resultados que se han graficado en las figuras 29, 30 y 31, respectivamente).

Tabla 3

Asentamiento y disipación de esfuerzos de un área cargada que tiende a infinita sin vibración, por solución de Boussinesq y de Steinbrenner para una capa y bicapa

Estrato superior, h (m)	Estrato inferior, h' (m)	B (m)	L (m)	u_1, u_2	E_1 (kN/m ²)	E_2 (kN/m ²)	* δ (cm)	** δ (cm)	Z 0,1 σ_c
0,0	14,0	2,0	30,0B	0,37	-	6500	7,52	6,78	6,28B
2,0	12,0	2,0	30,0B	0,37	22.500	6500	5,45	5,23	6,28B
3,0	11,0	2,0	30,0B	0,37	22.500	6500	4,82	4,62	6,28B
4,0	10,0	2,0	30,0B	0,37	22.500	6500	4,25	4,05	6,28B
8,0	6,0	2,0	30,0B	0,37	22.500	6500	3,13	2,93	6,28B
14,0	0,0	2,0	30,0B	0,37	22.500	-	2,17	1,96	6,28B

* Asentamiento elástico a partir de la solución de Boussinesq

** Asentamiento elástico a partir de la solución de Steinbrenner

Tabla 4

Asentamientos y disipación de esfuerzos con vibración por modelo de Virieux para una sola capa y para bicapa

Estrato superior, h (m)	Estrato inferior, h' (m)	B (m)	Fr (Hz)	u_1, u_2	E_1 (kN/m ²)	E_2 (kN/m ²)	δ (cm)	Z 0,1 δ_c
0,0	14,0	2,0	800	0,37	-	6500	8,89	6,2B
2,0	12,0	2,0	800	0,37	22.500	6500	5,43	6,2B
3,0	11,0	2,0	800	0,37	22.500	6500	4,20	6,15B
4,0	10,0	2,0	800	0,37	22.500	6500	3,29	6,10B
8,0	6,0	2,0	800	0,37	22.500	6500	2,50	4,5B
14,0	0,0	2,0	800	0,37	22.500	-	2,22	6,2B

Tabla 5

Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos. Modelo de Virieux

Q(N/m ²) = 50.000					Q ₀ (N/m ²) = 1.000		fr (Hz) = 400		
parámetros del suelo					h = 1,0B h = 2,0	h = 2,0B h = 4,0	h = 3,0B h = 6,0	h = 4,0B h = 8,0	h = 5,0B h = 10,0
γ _{t1} , γ _{t2}	ν ₁ , ν ₂	E ₁ (N/m ²)	E ₂ (N/m ²)	E ₁ /E ₂	δ _e				
1800	0,37	22.500.000	14.500.000	1,552	1,06	0,97	0,9	0,85	0,81
1800	0,37	18.750.000	14.500.000	1,293	1,13	1,07	1,04	1	0,98
1800	0,37	15.000.000	14.500.000	1,034	1,25	1,24	1,23	1,23	1,23
1800	0,37	11.250.000	14.500.000	0,776	1,44	1,5	1,5	1,46	1,43
1800	0,37	7.500.000	14.500.000	0,517	1,76	1,91	1,89	1,89	2,13
1800	0,37	3.750.000	14.500.000	0,259	2,75	3,15	3,96	5,24	5,01
1800	0,37	1.875.000	14.500.000	0,129	4,64	6,35	8,83	6,35	5,98

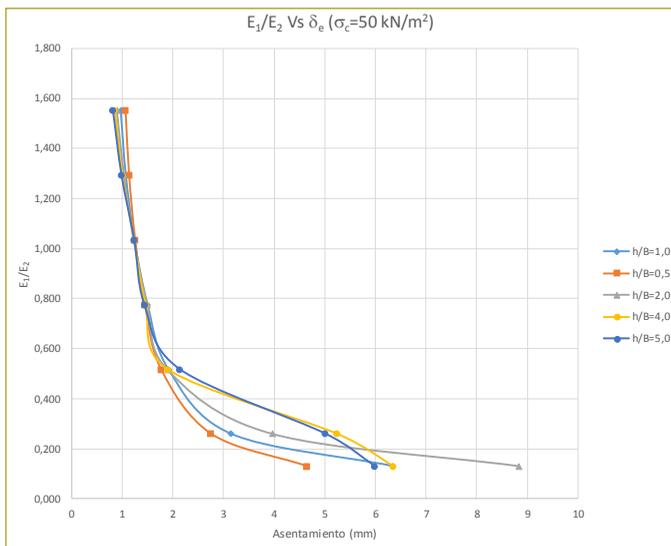


Figura 6. Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux.

Fuente: Elaboración propia.

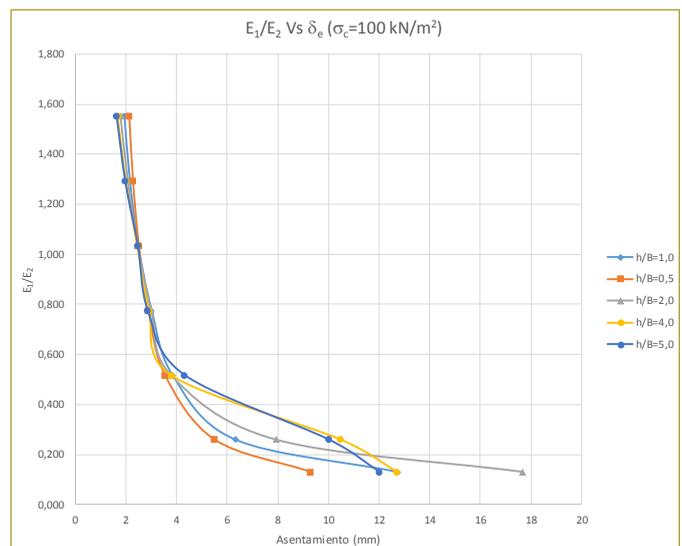


Figura 7. Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 6

Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux

Q(N/m ²) = 50.000					Q ₀ (N/m ²) = 1.000		fr (Hz) = 400		
parámetros del suelo					h = 1,0B h = 2,0	h = 2,0B h = 4,0	h = 3,0B h = 6,0	h = 4,0B h = 8,0	h = 5,0B h = 10,0
γ _{t1} , γ _{t2}	ν ₁ , ν ₂	E ₁ (N/m ²)	E ₂ (N/m ²)	E ₁ /E ₂	δ _e				
1800	0,37	22.500.000	14.500.000	1,552	2,12	1,93	1,79	1,69	1,62
1800	0,37	18.750.000	14.500.000	1,293	2,27	2,15	2,08	2,01	1,96
1800	0,37	15.000.000	14.500.000	1,034	2,5	2,48	2,47	2,46	2,46
1800	0,37	11.250.000	14.500.000	0,776	2,88	3,01	3	2,93	2,85
1800	0,37	7.500.000	14.500.000	0,517	3,53	3,83	3,78	3,78	4,3
1800	0,37	3.750.000	14.500.000	0,259	5,49	6,31	7,92	10,48	10
1800	0,37	1.875.000	14.500.000	0,129	9,29	12,71	17,76	12,7	12

Tabla 7

Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux

Q(N/m ²) = 50.000			Q ₀ (N/m ²) = 1.000			fr (Hz) = 400			
parámetros del suelo					h = 1,0B h = 2,0	h = 2,0B h = 4,0	h = 3,0B h = 6,0	h = 4,0B h = 8,0	h = 5,0B h = 10,0
γ _{t1} , γ _{t2}	ν ₁ , ν ₂	E ₁ (N/m ²)	E ₂ (N/m ²)	E ₁ /E ₂	δ _e				
1800	0,37	22.500.000	14.500.000	1,552	4,23	3,87	3,58	3,38	3,25
1800	0,37	18.750.000	14.500.000	1,293	4,53	4,29	4,15	4,02	3,92
1800	0,37	15.000.000	14.500.000	1,034	5	4,96	4,94	4,92	4,91
1800	0,37	11.250.000	14.500.000	0,776	5,75	6,01	6	5,86	5,7
1800	0,37	7.500.000	14.500.000	0,517	7,06	7,66	7,58	7,57	8,54
1800	0,37	3.750.000	14.500.000	0,259	10,98	12,61	15,84	20,97	20,04
1800	0,37	1.875.000	14.500.000	0,129	18,57	25,44	35,3	25,4	23,93

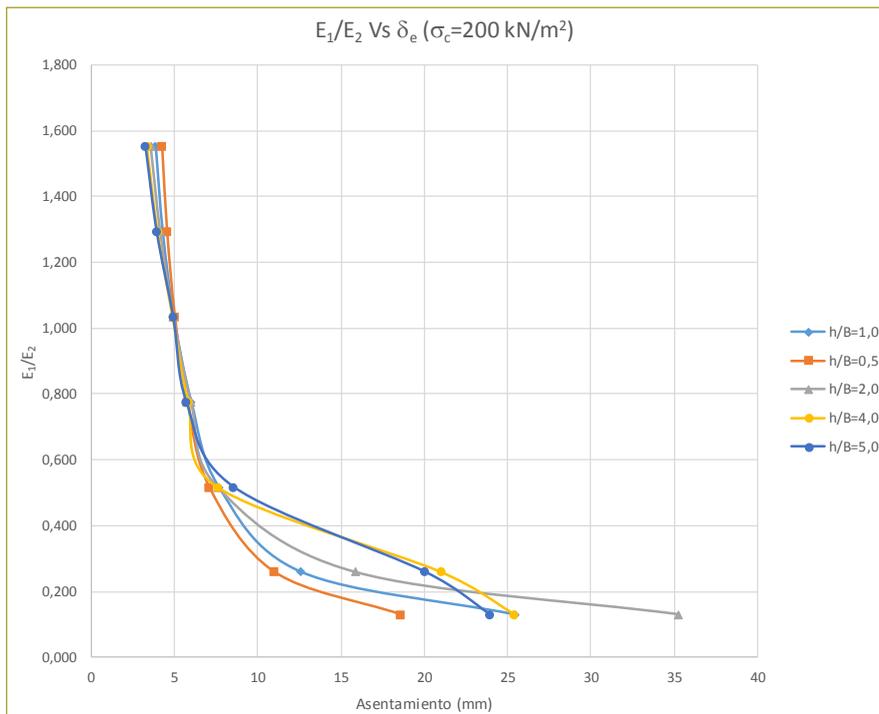


Figura 8. Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos. Modelo de Virieux.

Fuente: Elaboración propia.

7. Gráfica de bulbo de disipación de esfuerzos para diferentes relaciones e_1/e_2 conjugados con varias relaciones h/B (figuras 9 a 11).

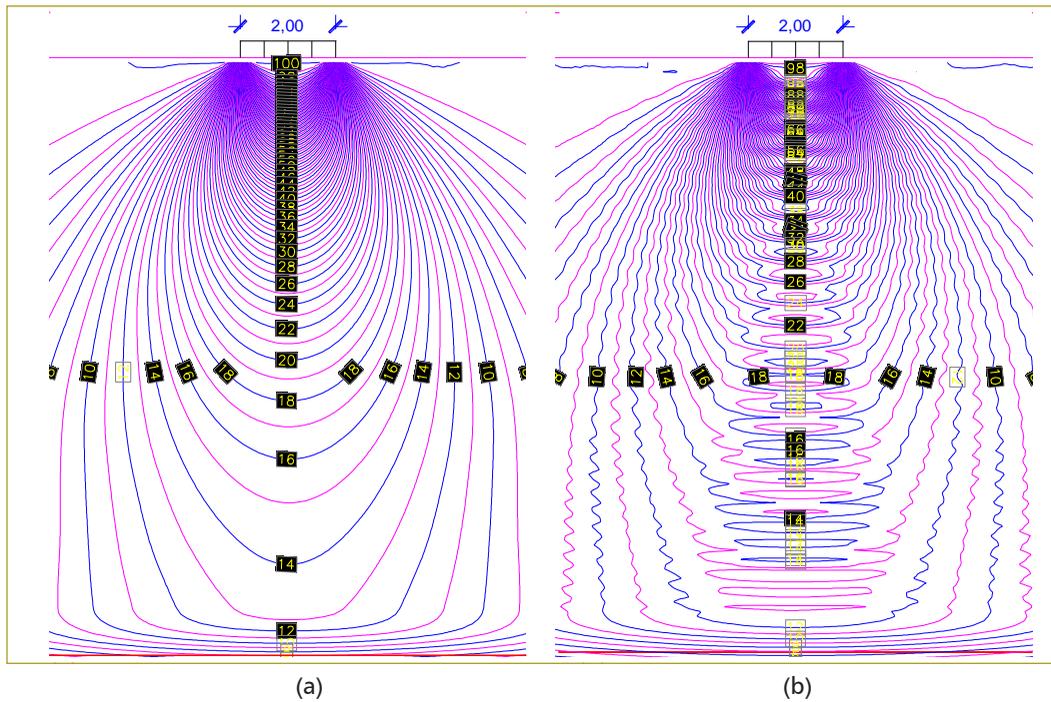


Figura 9. Bulbo de esfuerzos para un esfuerzo de 100 kPa (a) $f_r=0$ Hz, $h=10$ m y $E_1/E_2=1552$ (b) $f_r=200$ Hz y $h=8$ m y $E_1/E_2=1552$. Modelo de Virieux.

Fuente: Elaboración propia.

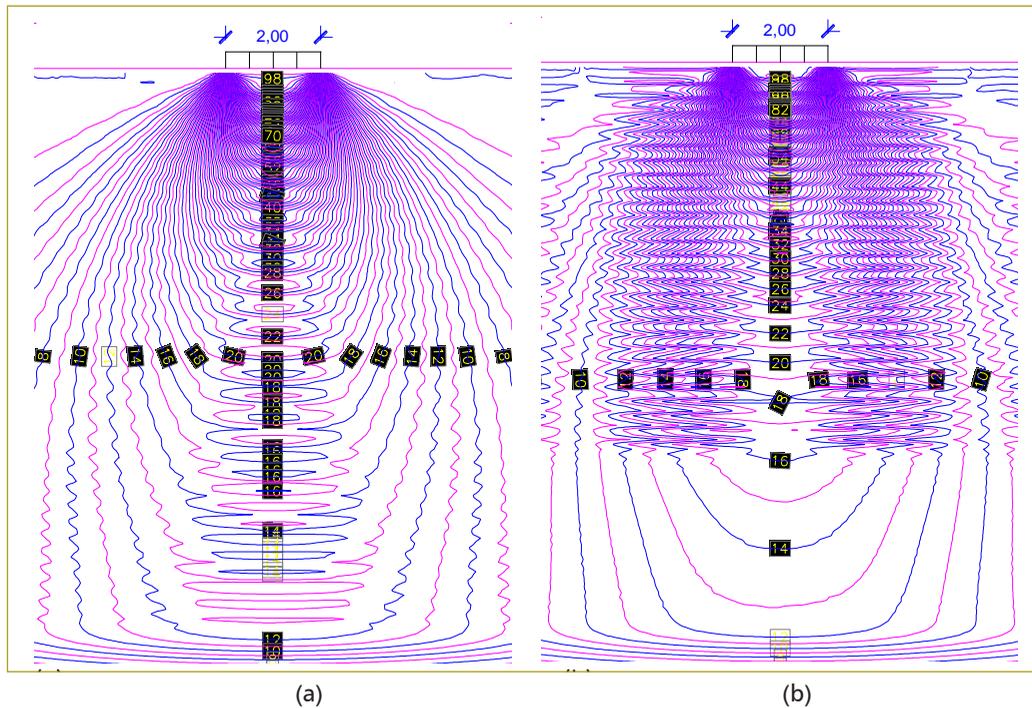


Figura 10. Bulbo de esfuerzos para un esfuerzo de 100 kPa (a) $f_r=300$ Hz, $h=8$ m y $E_1/E_2=1293$, (b) $f_r=400$ Hz y $h=8$ m y $E_1/E_2=1552$. Modelo de Virieux.

Fuente: Elaboración propia.

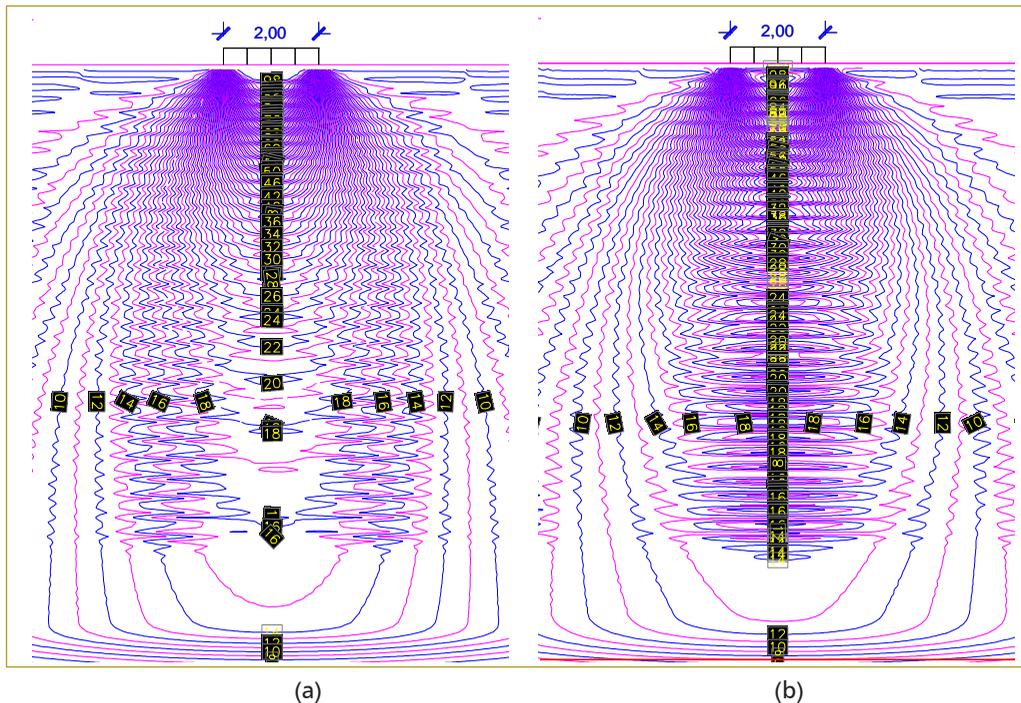


Figura 11. Bulbo de esfuerzos para un esfuerzo de 100 kPa (a) $f_r=400$ Hz, $h=10$ m y $E_1/E_2=1293$, (b) $f_r=400$ Hz y $h=10$ m y $E_1/E_2=1552$. Modelo de Virieux.

Fuente: Elaboración propia.

CONCLUSIONES

Los diagramas de disipación de esfuerzos/frecuencia para cada configuración estratigráfica han mostrado una perturbación en las líneas isobaras, especialmente perceptibles en el estrato más rígido, lo cual corresponde a la existencia de vibración excesiva, que es un elemento indicativo de la existencia de una frecuencia de resonancia. Aunque no es posible determinarla con precisión, sí se identifica su existencia.

Se puede concluir para estratos rígidos de espesor menor o muy cercano al ancho del área cargada, subyacentes por estratos de suelo blando, que la vibración pasa inadvertida debido a que las vibraciones se absorben rápidamente.

Se ha comprobado que para una faja de la superficie del terreno, de ancho finito y longitud infinita uniformemente cargada, la profundidad a la que se disipa el 90 % del esfuerzo transmitido en superficie es aproximadamente 6,2 veces el ancho de la faja de carga y en la horizontal esto ocurre aproximadamente 4,0 veces el ancho de la faja de carga.

Se ha comprobado que en el caso de un área rectangular cargada, la longitud a la que el área cargada ya no experimenta incremento en la profundidad de disi-

pación de esfuerzos y a la que dicha profundidad ya se hace equivalente a la de una franja de longitud infinita es aproximadamente 25 veces su ancho.

A partir de la solución de Boussinesq, un área rectangular de ancho B uniformemente cargada y que tiende a infinita ($L \geq 25$ veces B), presenta un asentamiento aproximadamente igual a 1,9 veces que el valor obtenido en un área cuadrada uniformemente del mismo ancho.

A partir de la solución de Steinbrenner, un área rectangular de ancho B uniformemente cargada y que tiende a infinita ($L \geq 25$ veces B) presenta un asentamiento aproximadamente igual a 1,8 veces que el valor obtenido en un área cuadrada uniformemente del mismo ancho.

El valor de asentamiento elástico, calculado a partir de la teoría de elasticidad lineal y por soluciones tradicionales, para el caso de cimentaciones sometidas a carga estática no experimenta diferencia considerable con el calculado a partir del método de Virieux.

El bulbo de disipación de esfuerzos en una masa de suelo, calculado a partir de la teoría de elasticidad lineal y por soluciones tradicionales, para el caso de cimentaciones sometidas a carga estática no experimenta diferencia considerable con el calculado a partir del método de Virieux.

Los esfuerzos en la masa de suelo, cuando se tiene un estrato superior bastante rígido subyacente por un estrato de menor rigidez, tienden a disiparse en mayor proporción en el estrato superior.

SUGERENCIAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

En razón de que esta investigación estuvo enfocada en el estudio de comportamiento del suelo bajo franja de carga infinita, que reduce el problema a dos dimensiones, sería interesante escribir un código para modelar áreas cargadas de geometría definida (por ejemplo, áreas rectangulares).

Debido a que en este trabajo de grado no se tuvo en cuenta la inercia del área cargada, sino que la carga se implementó como esfuerzos aplicados directamente sobre la superficie, un trabajo futuro de investigación sería el estudio de la variable masa inercial dentro del modelo numérico.

Sería interesante poder implementar un código para modelar cimentaciones donde se considere el empotramiento o profundidad de cimentación.

SUGERENCIAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Debido a que esta investigación estuvo orientada al estudio de comportamiento del suelo bajo franja de carga infinita, que reduce el problema a dos dimensiones, sería interesante escribir un código para modelar áreas cargadas de geometría definida (por ejemplo, áreas rectangulares) y ajustar la geometría del modelo y localización de condiciones de frontera para eliminar la forma achatada que se origina en las partes inferior y lateral de las gráficas de isobaras.

Así mismo, en virtud de que en este trabajo de grado no se tuvo en cuenta la inercia del área cargada, sino que la carga se implementó como esfuerzos aplicados directamente sobre la superficie, un trabajo futuro de investigación sería el estudio de la variable masa inercial dentro del modelo numérico.

Sería interesante poder implementar un código para modelar cimentaciones donde se considere el empotramiento o profundidad de cimentación.

REFERENCIAS

- Alterman, Z., & Karal, F. (1968). Propagation of Elastic Waves in Layered Media by Finite Difference Methods. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 58, 367-398.
- Cerjan, C., & Dan, K. (1985). A Nonreflecting Boundary Condition for Discrete Acoustic and Elastic Wave Equation. *Geophysics*, 705-708.
- Clayton, R., & Engquist, B. (1977). Absorbing Boundary Conditions for Acoustic and Elastic Wave Equation. *Bulletin of The Seismological Society of America*, 1529-1540.
- Clayton, R., & Engquist, B. (1980). Absorbing boundary conditions for wave-equation migration. *Geophysics*, 985-904.
- Fridtjov, I. (2008). *Continuum Mechanics*. Springer.
- González, M. (2001). *El Terreno*. Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, Edicions Virtuals: www.edicionsups.es, pp. 240. Obtenido junio de 2016.
- Gray, W. (1984). Comparison of Finite Difference and Finite Element Methods. *NATO Advanced Study Institute on Mechanics of Fluids in Porous Media* (pp. 901-952). Martinus Nijhoff.
- Heaton, T. (2005). *California Institute of Technology*. Obtenido de http://www.its.caltech.edu/~heatont/Eng_Seism_Notes/ch3_waves.pdf.
- Kelly, K. (1976). Synthetic Seismograms: A Finite Difference Approach. *Geophysics*, 41 2-27.
- Kelly, K., & Ward, R. (1976). Synthetic Seismograms: a Finite-Difference Approach. *Geophysics*, 2-27.
- Lamb, H. (1904). On the Propagation of Tremors Over de Surface of an Elastic Solid. *Philosophical Transactions*.
- Lautrup, B. (2011). *Physics of Continuous Matter*. CRC Press.
- LeVeque, R. (2005). *Finite Dierence Methods for Dierential Equations (Draft Version)*. University of Washington.
- Lynch, D. (2005). *Numerical Partial Differential Equeations for Enviromental Scientists and Engineers*. Springer.
- Moczo, P. (2004). The Finite-Difference Method For Seismologists. *Comenius University Bratislava, Spice*.
- Moczo, P., & Kristek, J. (2004). *The Finite-Difference Method for Seismologists. An Introduction*. Comenius University Bratislava.
- Müller, G. (2007). *Theory of Elastic Waves*. Germany: Universität Potsdam.
- Reddy, J. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw Hill.
- Rodríguez del Río, R., & Zuazua, E. (2002). *Universidad Complutense de Madrid*. Obtenido de http://www.bcarnath.org/documentos_public/archivos/personal/conferencias/cubo.pdf
- Schneider, J. (2014). *Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method*.
- Tristancho, J., & Caicedo, B. (2012). *Contribuciones para un mejor entendimiento de la modelación física y numérica de la interacción suelo-atmósfera en centrifuga geotécnica*. Bogotá: Universidad de Los Andes.
- Verruijt, A. (2001). *Soil Mechanics*. Delft University of Technology.
- Virieux, J. (1984). SH-wave Propagation in heterogeneous media. *Geophysics*, 1933-1957.
- Virieux, J. (1986). P-SV wave Propagation in Heterogeneous Media. *Geophysics*, 889-901.
- Virieux, J. (1986). P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 889-901.
- Rondón, H. A & Reyes, F. (2009). Deformación permanente de materiales granulares en pavimentos flexibles: estado del conocimiento. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, 8, 71-94. Obtenido de <https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=2ahUKewi5ne6p2cPeAhXExlk>

KHSEYDgwQFjAAegQICBAC&url=http%3A%2F%2Fwww.scielo.org.co%2Fpdf%2Frium%2Fv8n14%2Fv8n14a06.pdf&usg=AOvVaw3YpuZ8RjVytkcMrnn2L-dv (junio de 2016).

Pérez Ruiz, J.A. (2007) "Un método de diferencias finitas para el análisis de la propagación de ondas. Aplicación al modelado de la respuesta sísmica de estructuras geológicas en entornos de computación en paralelo". Tesis doctoral universidad de Almería. España. Edición virtual obtenido en noviembre de 2018 de https://books.google.com.co/books?id=JqtfGruzLEc&pg=PA18&lpg=PA18&dq=%22se+puede+escribir+de+una+m+anera+compacta+de+la+siguiente+forma%22&source=bl&ots=FiX74DbjOr&sig=zfbKyKqFc70P4XV5STZU-9bTrjE&hl=es-419&sa=X&ved=2ahUKEwjWlYrv_tjeAhVJmlkKHVeqBeYQ6AEwCHoECAgQAQ#v=onepage&q=%22se%20puede%20escribir%20de%20una%20manera%20compacta%20de%20la%20siguiente%20forma%22&f=false.

Herrera Castiblanco, F.A. (2017). Manual para diseño de cimentaciones para equipos vibratorios. Tesis de maestría, Escuela Colombiana de Ingeniería. Colombia, pp. 19-21. Obtenido en noviembre de 2018 de <https://repositorio.escuelaing.edu.co/handle/001/550>.

Berry, P., & Reid, D. (s.f.). *Mecánica de suelos*. Departament of Civil Engineering, University of Salford. Traducción Universidad del Cauca. Colombia, pp. 61-77. Obtenido de https://www.academia.edu/31824775/Mec%C3%A1nica_De_Suelos_-_Peter_L._Berry_and_David_Reid.pdf. Obtenido noviembre de 2018

Braja M., Das (2006). *Principles of Geotechnical Engineering* (7th ed.). Canada: Cengage Learning.

Kramer, S. (1996). *Geotechnical Earthquake Engineering*. New Jersey: Prentice Hall.

Bowles, J. (1997). *Foundation Analysis and Design* (5th ed.). Singapore: McGraw-Hill.

Di Bartolomeo, O. & Ymoli E. (2008). Análisis sobre fundaciones aisladas superficiales sometidas a vibraciones inducidas por bombas centrífugas y reciprocantes. Tesis trabajo especial de grado Universidad Rafael Urdaneta, pp. 87-88. Obtenido en agosto de 2017 de <https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjH2-Tzz5XgAhWEjFkKHZQnBAQQFjAAegQICRAC&url=http%3A%2F%2F200.35.84.131%2Fportal%2Fbases%2Fmarc%2Ftexto%2F2301-08-02358.pdf&usg=AOvVaw1PeebW4qxKrdYXvOXCv-w>.

Díaz R., J.A. (s.f.). Caracterización dinámica de los suelos. Ensayos de campo y Laboratorio. Obtenido de https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=14&ved=2ahUKEwjJ87Wg-ZXgAhWGNfKkHY4YAj0QFjANegQIARAC&url=https%3A%2F%2Fwww.imt.mx%2Farchivos%2FPublicaciones%2FPublicacionTecnica%2Fpt420.pdf&usg=AOvVaw0-2gEyFmqBNyqTrNaCJQ_W Obtenido agosto de 2017.

Medina, F. & Reyes, A. (1986). Precisión en la discretización de problemas unidimensionales de propagación de ondas. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en ingeniería*, 2, (2), 121-134. Universidad de Chile. Obtenido en enero de 2019 de https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=2ahUKEwjmic6Ok5bgAhUmja0KHd_DCAUQFjAAegQIChAC&url=https%3A%2F%2Fupcommons.upc.edu%2Fbitstream%2Fhandle%2F2099%2F8751%2FArticle01.pdf%3Fsequence%3D1%26isAllowed%3Dy&usg=AOvVaw0U4ibc2uRnEwWTqV5cC7Xw.